РАБОТА И ЭНЕРГИЯ.

I. Потенциальная энергия. Работа. Задачи.

IA. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы однородный свинцовый кубик с ребром ℓ, находящийся на горизонтальной плоскости, повернуть с одной грани на другую ?

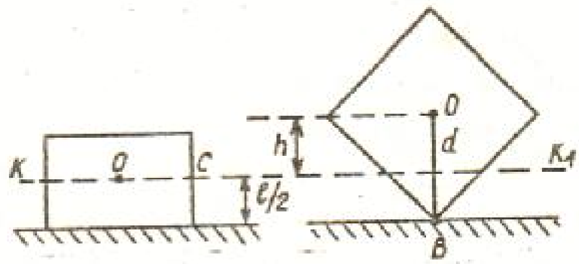
Решение:

Дано:

ρ ;

ℓ ;

$A-?$



При поворачивании куба центр тяжести его (точка O) должен быть поднят на высоту

$$h = d - \frac{\ell}{2}.$$

Следовательно, наименьшая работа, необходимая для такого поворота, будет равна изменению (увеличению) только потенциальной энергии кубика при подъеме его центра тяжести на эту высоту h:

$$A = E_2^п - E_1^п,$$

где $E_1^п$ – потенциальная энергия кубика в положении, изображенном на первом рисунке, $E_2^п$ – в положении, изображенном на втором рисунке. За уровень начала отсчета потенциальной энергии выберем уровень KK_1, проходящий через центр тяжести кубика в исходном положении. Тогда $E_1^п=0$, а $E_2^п=mgh$, где m– масса кубика: $m = \rho V = \rho \ell^3$ (– плотность свинца). Следовательно,

$$A = E_2^п - E_1^п = g\rho\ell^3(d - \frac{\ell}{2}).$$

Половину диагонали куба d выразим через его ребро ℓ :

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2+\ell^2} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

Окончательно для A имеем:

$$A = g\rho\ell^3(\frac{\ell\sqrt{2}}{2} - \frac{\ell}{2}) = g\rho\frac{\ell^4}{2}(\sqrt{2} - 1) \approx 0,2\ g\rho\ell^4$$

2А. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы поднять землю при рытье колодца, если его глубина h = 10 м, а площадь поперечного сечения S= 2 м²? Масса одного кубического метра земли в среднем равна 2 т. Считать, что вынимаемый грунт рассыпается тонким слоем по поверхности Земли.

Решение:

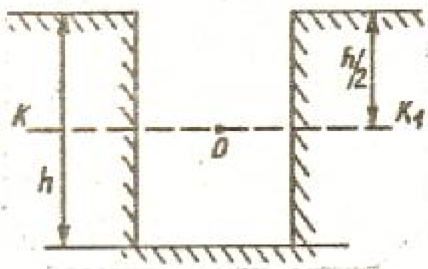
Дано:

$h=10$ м

$S=2$ м²

$\rho=2$ т/м³$=2\cdot10^3$кг/м³

A – ?



Уровень KK_1 начала отсчета потенциальной энергии выберем проходящим через центр тяжести (точка O) вынутой земли. Тогда запас потенциальной энергии земли до и после ее выемки соответственно есть: $E_1^п=0$, $E_2^п=mg\frac{h}{2}$ (так как вся земля лежит теперь на поверхности Земли, то центр тяжести ее переместился из точки О на поверхность Земли, т.е. на h/2).

Искомая работа равна изменению потенциальной энергии:

$$A = E_2^п - E_1^п = mg\frac{h}{2} \qquad (1)$$

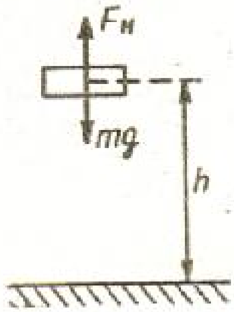
Массу вынутого грунта m определим через известные в условии задачи величины:

$$m = \rho hS.$$

Подставляя это выражение в (1), получим:

$$A = g\rho S\frac{h^2}{2} \approx 1{,}96\cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

3А. Определить работу, совершенную краном при равномерном подъеме тела массой m = 3т на высоту h = 7м.



Решение:

Дано:

m = 3т = $3\cdot10^3$кг

h = 7м

А-?

Изобразим схематично тело, поднятое на высоту h, и укажем действующие на него силы: силу тяжести ($\vec{mg}$) и силу натяжения троса $\vec{F_н}$. Выберем за уровень отсчета потенциальной энергии поверхность Земли. Работу совершает сила натяжения, совпадающая по направлению с перемещением тела. Она по модулю равна силе тяжести mg (т.к. груз движется равномерно, то по первому закону Ньютона $\vec{F_н} + \vec{mg} = 0$ или $F_н - mg = 0$). Работа этой силы есть

$$A = F_н\, h = mg\, h = 10\cdot 3\cdot 10^3\cdot 7 = 2{,}1\cdot 10^5 \text{ Дж}$$

4А. Сила тяги трактора при пахоте равна 10000 Н, а скорость – 7 км/ч. Какую работу совершит трактор за 8 ч ?

Решение:

Дано:

$F_т = 10^4$ Н

V = 7 км/ч

t = 8 ч

А – ?

На плуг трактора действуют две силы: сила тяги $\vec{F_т}$ и сила сопротивления почвы $\vec{F_{тр}}$. Работу совершает сила тяги, совпадающая по направлению с перемещением:

$$A = F_т\, S.$$

При равномерном движении S=Vt. Тогда

$$A = F_T\,S = F_T\,Vt = 10^4 \cdot 7 \cdot 10^3 \cdot 8 = 5{,}6 \cdot 10^8 \text{ Дж.}$$

5А. Вертолет, масса которого с грузом $6 \cdot 10^3$ кг, за 2,5 мин набрал высоту 2250 м. Определить работу двигателя за это время, считая подъем вертолета равноускоренным.

Решение:

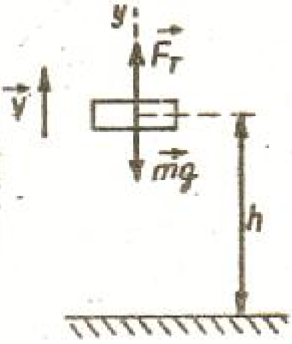
Дано:

$m = 6 \cdot 10^3$ кг

$t = 2{,}5$ мин $= 150$ с

$h = 2250$ м

A – ?



Изобразим схематично вертолет, поднявшийся на высоту h. На него действуют две силы: сила тяги двигателя $\vec{F_T}$ и сила тяжести $\vec{mg}$. По второму закону Ньютона

$$\vec{F_T} + \vec{mg} = \vec{ma}$$

или проецируя на вертикальную ось y:

$$F_T - mg = ma$$

Отсюда

$$F_T = mg + ma.$$

Работа двигателя равна работе силы тяги F_T:

$$A = F_T\,h = (mg + ma)h. \qquad (1)$$

Ускорение a найдем из формулы для перемещения при равноускоренном движении $h = at^2/2$. Отсюда $a = 2h/t^2$.

Подставляя это выражение в (1), получим:

$$A = (mg+ma)h = \left(mg+m\frac{2h}{t^2}\right)h = mgh + \frac{2mh^2}{t^2} =$$

$$= 6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 2250 + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 2250^2}{150^2} = 135 \cdot 10^6 \text{ Дж}$$

6А. Ракета под действием ракетоносителя была поднята на высоту $4 \cdot 10^4$ м и приобрела скорость $1{,}4 \cdot 10^3$ м/с. Определить работу, выполненную ракетоносителем, а также кинетическую и потенциальную энергию ракеты на этой высоте, если масса ракеты 500 кг.

Решение:

На ракету во время ее полета действуют две силы: сила тяги $\vec{F_T}$ и сила тяжести $\vec{mg}$. По второму закону Ньтона в проекции на вертикальную ось $F_т - mg = ma$

Дано:

$h = 4 \cdot 10^4$ м

$V = 1{,}4 \cdot 10^3$ м/с

$m = 500$ кг

A-? Wк-? Wп-?

или

$$F_т = mg + ma.$$

Работа силы тяги есть

$$A = F_т h = (mg+ma)h \quad (1)$$

Ускорение a найдем из выражений для перемещения ($h=at^2/2$) и скорости ($V=at$) при равноускоренном движении без начальной скорости.

$$\begin{cases} h = \dfrac{at^2}{2} \\ V = at \end{cases} \qquad h = \frac{V^2}{2a} \quad , \ a = \frac{V^2}{2h}$$

Подставляя последнее выражение в (1), получим:

$$A = (mg + ma)h = mgh + m\frac{V^2}{2h}h = mgh + \frac{mV^2}{2} \ .$$

Из этого выражения видно, что работа равна сумме потенциальной и кинетической энергии ракеты. Потенциальная энергия равна

$$W_п = mgh = 500 \cdot 9{,}8 \cdot 4 \cdot 10^4 = 196 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 196 \text{ МДж}.$$

Кинетическая энергия ракеты

$$W_к = \frac{mV^2}{2} = \frac{500(1{,}4)^2 \cdot 10^6}{2} = 490 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 490 \text{ МДж}.$$

Тогда работа

$$A = W_п + W_к = 196 \cdot 10^6 + 490 \cdot 10^6 = 686 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 686 \text{ МДж}.$$

7А. В каком случае двигатель автомобиля должен совершить большую работу: для разгона с места до скорости 27 км/ч или на увеличение скорости от 27 до 54 км/ч? Силу сопротивления и время движения в обоих случаях считать одинаковыми.

Решение:

Дано:

$V_1 = 27$ км/ч

$V_2 = 54$ км/ч

A_1/A_2-?

По закону сохранения энергии разность полной механической энергии тела в конечный и начальный моменты равна работе внешних сил, действующих на тело. По условию задачи автомобиль двигается по поверхности Земли, следовательно, его потенциальная энергия не меняется. В первом случае кинетическая энергия автомобиля в начальный момент равна нулю (автомобиль покоится), в конечный момент $W_{кон}^{(к)} = \frac{mV_1^2}{2}$, где m – масса автомобиля. Работа по разгону автомобиля в этом случае равна $A = W_{кон}^{(к)} - W_{нач}^{(к)} = W_{кон}^{(к)} = \frac{mV_1^2}{2}$ (1)

Во втором случае кинетическая энергия автомобиля в начальный момент $W_{нач}^{(к)} = \frac{mV_1^2}{2}$, в конечный $W_{кон}^{(к)} = \frac{mV_2^2}{2}$.

Работа в этом случае есть

$$A = W_{кон}^{(к)} - W_{нач}^{(к)} = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \frac{m}{2}(V_2^2 - V_1^2) \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) найдем отношение $\frac{A_1}{A_2}$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{mV_1^2\ 2}{2m(V_2^2 - V_1^2)} = \frac{V_1^2}{V_2^2 - V_1^2} = \frac{27^2}{54^2 - 27^2} = \frac{27^2}{(54+27)(54-27)} = \frac{27^2}{27 \cdot 81} = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$$

Таким образом, работа во втором случае в 3 раза больше, чем в первом.

8Б. Вагонетку массой $m=3$ т поднимают по рельсам в гору, наклон которой к горизонту равен $\beta = 30°$. Какую работу совершила сила тяги на расстоянии $S = 50$ м, если известно, что вагонетка двигалась с ускорением $a = 0,2$ м/с²? Коэффициент трения принять равным $\mu = 0,1$.

Решение:

Дано:

$m = 3т = 3 \cdot 10^3$ кг

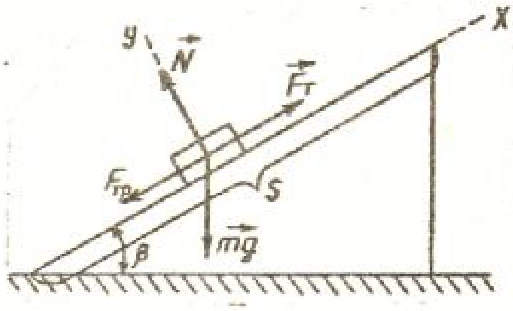
$\beta = 30°$

$S = 50$ м

$a = 0,2$ м/с

$\mu = 0,1$

$A = ?$



Сделаем чертеж и изобразим на нем все силы, действующие на вагонетку: это сила тяги $\vec{F}_т$, сила тяжести $m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и реакция опоры $\vec{N}$. По условию задачи необходимо вычислить работу постоянной силы тяги $\vec{F}_т$. Эта работа определяется формулой

$$A = F_т S \cos \alpha \qquad (1)$$

где α–угол между направлением действия силы и перемещением. Сила тяги в нашем случае направлена вдоль перемещения, поэтому угол

$\alpha = 0$ и, следовательно, $\cos\alpha = 1$.

Чтобы определить $F_т$, запишем для вагонетки уравнение второго закона Ньютона. Выберем определенную систему координат (см.рис.). Проекция сил, действующих на вагонетку, по осям X и Y равны соответственно $F_т$, $-mg\sin\beta$, $-F_{тр}$ и N, $-mg\cos\beta$.

Уравнение II закона Ньютона в проекции на ось X есть:

$$F_т - mg\sin\beta - F_{тр} = ma \qquad (2)$$

на ось Y:

$$N - mg\cos\beta = 0$$

Учитывая, что $F_{тр} = \mu N$, уравнение (2) перепишем в виде

$$F_т - mg\sin\beta - \mu mg\cos\beta = ma.$$

Найдем из этого уравнения силу тяги $F_т$ и подставляя ее значение в уравнение (1), получим:

$$A = m(a + g\sin\beta + \mu g\cos\beta)S \approx 885 \text{ кДж}.$$

9Б. По Земле волоком равномерно перемещают мешок массой $m = 50$ кг на расстояние $S = 10$ м. Какую при этом нужно приложить к мешку силу и какую совершить работу, если коэффициент трения $\mu = 0{,}6$? Как в общем случае сила и ее работа зависят от угла между направлениями силы и перемещения ? При каком угле α сила наименьшая ?

Решение:

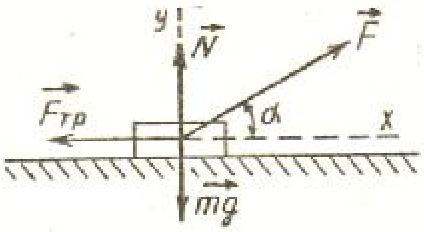
Дано:

$m = 50$ кг

$S = 10$ м

$\mu = 0{,}6$

F-? A-?



Сделаем чертеж и изобразим на нем все силы, действующие на мешок: силу тяги $\vec{F}$, силу тяжести $m\vec{g}$, силу трения $\vec{F}_{тр}$ и реакцию опоры $\vec{N}$.

По условию задачи мешок двигается равномерно, следовательно,

$$\vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F} + m\vec{g} = 0 . \qquad (1)$$

Выберем определеную систему координат (см.рис.) и спроецируем на оси X и Y уравнение (1):

ось OX: $F\cos\alpha - F_{тр} = 0$

ось OY: $N - mg + F\sin\alpha = 0$

Учитывая, что $F_{тр} = \mu N$, из последних двух уравнений найдем F:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \qquad (2)$$

Работа силы F по определению равна

$$A = F\,S\cos\alpha\,,$$

или, учитывая (2):

$$A = \frac{\mu mg\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\,S = \frac{\mu mg}{1+\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}\,S.$$

Найдем теперь, при каком угле α сила F будет наименьшей. Это будет при таком α, при котором знаменатель дроби в уравнении (2) будет максимален. Максимальное значение выражения $(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)$ можно найти, взяв от него производную, приравняв ее нулю и найдя точку максимума:

$$(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)' = -\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 0,$$

$$\mu\cos\alpha = \sin\alpha,\quad \mu = \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Следовательно, если $\mathrm{tg}\,\alpha = \mu$, то сила F будет минимальна. По условию задачи $\mu = 0{,}6$ и из $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}6$ имеем $\alpha = 31°$.

10А. Груз массой 2 кг, падающий с высоты 5 м, проникает в мягкий грунт на глубину 5 см. Определить среднюю силу сопротивления грунта.

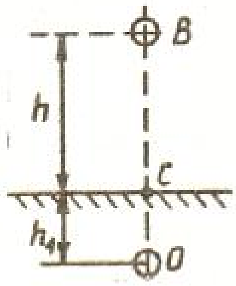
Решение:

Дано:

$m = 2$ кг

$h = 5$ м

$h_1 = 5$ см $= 0{,}05$ м



$\langle F \rangle$ – ?

Сделаем рисунок, направим ось Y вертикально вверх, начало оси выберем на глубине h от поверхности земли. На участке CO действует внешняя сила (сопротивление грунта), поэтому по закону сохранения энергии

$$A_{сопр} = |\langle F\rangle|\,h_1 = E_B - E_O \qquad (1)$$

Но в точке O скорость равна нулю (тело остановилось), а потенциальная энергия равна нулю вследствие выбора нулевого уровня; следовательно, $E_O = 0$.

В точке B тело тоже покоится, и его полная энергия равна потенциальной энергии: $E_B = E_B^{п} = mg(h+h_1)$. Имеем из (1):

$$|\langle F\rangle|\,h_1 = mg(h+h_1),$$

откуда

$$\langle F\rangle = \frac{mg(h+h_1)}{h_1} = mg\left(\frac{h}{h_1}+1\right) = 2\cdot 9{,}8\cdot\left(\frac{5}{0{,}05}+1\right) = 1{,}98\ кН.$$

11А. Снаряд массой 10 кг вылетает из ствола орудия со скоростью 600 м/с. Определить среднюю силу давления пороховых газов, если время движения снаряда в стволе 0,01 с.

Решение:

Дано:

$m = 10$ кг
$V = 600$ м/с
$t = 0{,}01$ с

F – ?

По закону сохранения энергии

$$E_{кон} - E_{нач} = A,$$

где $E_{кон} = \frac{mV^2}{2}$ – кинетическая энергия пули при вылете из ствола (потенциальная энергия пули во время ее движения по стволу не меняется), $E_{нач} = 0$ (в начале движения пуля покоилась), $A = FS$ – работа силы давления пороховых газов на длине ствола S.

Итак, $\frac{mV^2}{2} - 0 = FS$ или $F = \frac{mV^2}{2S}$ (1)

Длину ствола S найдем из уравнений кинематики, зная, что пуля движется по стволу равноускоренно в течение времени t:

$$S = \frac{at^2}{2}, \qquad V = at.$$

Выражая из второго уравнения a и подставляя в первое, получим

$$S = \frac{V}{t}\cdot\frac{t^2}{2} = \frac{Vt}{2}.$$

Подставляя это выражение для S в уравнение для силы (1), окончательно получим:

$$F = \frac{mV^2}{2S} = \frac{mV^2\cdot 2}{2\cdot Vt} = \frac{mV}{t} = \frac{10\cdot 600}{0{,}01} = 6\cdot 10^5\ Н = 0{,}6\ МН.$$

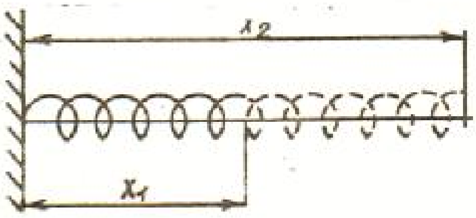
12А. Найти работу, которую надо совершить, чтобы сжать пружину, жесткость которой 29,4 Н/см, на 20 см, если известно, что сила пропорциональна сжатию пружины.

Решение:

Дано:

$x_1 = 0$

$x = x_2 - x_1 = 20$ см $= 0{,}2$ м



$k = 29{,}4$ Н/см$=2{,}94\cdot10^{3}$ Н/м

А – ?

Для нахождения работы по растяжению пружины воспользуемся законом сохранения энергии:

$$E_{кон} - E_{нач} = A,$$

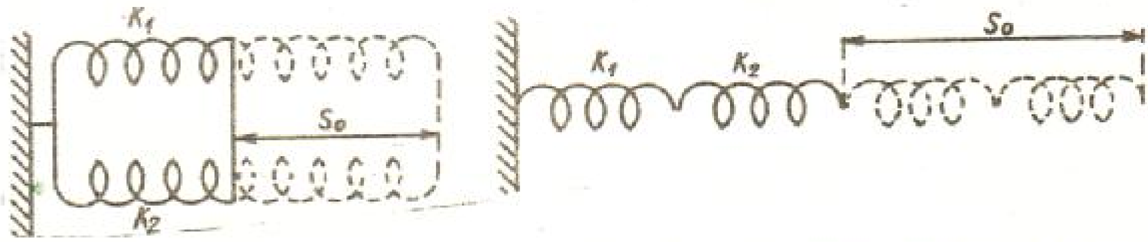
где А – работа, Енач – энергия системы (пружины) в начальный момент (до растяжения), Екон – энергия системы (пружины) в конечный момент (после растяжения). По условию задачи в начальный момент пружина была не растянута ($x_1=0$), т.е. ее потенциальная энергия Енач равна нулю. После того, как пружину растянули до длины x_2, ее потенциальная энергия стала равна

$$E_{кон} = \frac{k(x_2-x_1)^2}{2} = \frac{kx^2}{2}\ .$$

$$A = \frac{kx^2}{2} = \frac{2{,}94\cdot10\cdot(0{,}2)^2}{2} = 59\ Дж.$$

13В. Две пружины одинаковой длины, имеющие соответственно жесткости $K_1=9{,}8$ Н/см и $K_2=19{,}6$ Н/см, соединены между собой концами (параллельно). Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружины на $S_0 = 1$ см ? Чему будет равна эта работа, если пружины будут соединены между собой только одним концом (последовательно) ?

Решение:



Чтобы растянуть или сжать пружину на заданную длину, к ней нужно приложить силу, модуль которой зависит от упругих свойств пружины. Эти свойства характеризуются ее жесткостью К. При небольших удлинениях или сжатиях упругих пружин можно с большой степенью точности считать, что удлинение S пружины прямо пропорционально приложенной к ней силе, т.е. $F = kS$. Работу такой силы можно найти путем умножения средней за перемещение силы на величину перемещения. Среднее значение переменной силы ($F=kS$) на каком-либо перемещении равно полусумме ее значений $F_н$ в начале и $F_к$ в конце этого перемещения:

$$F_{ср} = \frac{F_н + F_к}{2}$$

Если $F_н=0$ и $F_к=F$, работы силы на перемещении S равна:

$$A = \frac{F\ S}{2} = \frac{kS^2}{2} = \frac{F^2}{2k} \qquad (*)$$

Такую же работу совершает и сила упругости при растяжении и сжатии пружины из свободного состояния.

При параллельном или последовательном соединении пружин с известной жесткостью K_1 и K_2 их общую жесткость K можно вычислить следующим образом.

При растяжении силой F двух пружин, соединенных параллельно, общее удлинение пружин

$$S_o = S_1 = S_2 , \qquad (1)$$

где S_1 и S_2 удлинение первой и второй пружин. Если растянутые пружины находятся в равновесии и массы их ничтожно малы, то модуль силы, деформирующей пружины, равен сумме модулей сил F_1 и F_2 натяжений пружин т.е.

$$F_o = F_1 + F_2 \qquad (2)$$

поскольку все силы действуют по одной прямой.

Для системы пружин и каждой пружины в отдельности можно записать:

$$F_o= k_oS_o,\ F_1= k_1S_1,\ F_2=k_2S_2. \ (3)$$

Исключая из уравнений (1) - (3) силы и удлинения, получим:

$$k_o = k_1+ k_2$$

В общем случае при параллельном соединении n пружин их общая жесткость равна:

$$k_o = \sum_{i=1}^{n} k_i \ .$$

Зная жесткость двух пружин, соединенных параллельно, и удлинение, легко найти работу, совершенную силой F_o. Согласно формуле (*) она равна:

$$A_1 = \frac{k_oS_o^2}{2} = \frac{(k_1+ k_2)\ S_o^2}{2} = 0,147 \text{ Дж.}$$

При растяжении двух пружин, соединенных последовательно, натяжение каждой пружины равно внешней приложенной силе:

$$F_1 = F_2 = F_o, \qquad (4)$$

а общее удлинение - сумме удлинений каждой пружины:

$$S_o = S_1 + S_2 \qquad (5)$$

Кроме того, для системы пружин и каждой пружины в отдельности будут иметь место соотношения (3).

Исключая из уравнений (4), (5) и (3) силы и удлинения, получим:

$$\frac{1}{k_o} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},$$

откуда

$$k_o = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

В общем случае при последовательном соединении n пружин их общую жесткость можно найти из формулы

$$\frac{1}{k_o} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}.$$

Работа по растяжению двух последовательно соединенных пружин согласно формуле (Ж) равна:

$$A_2 = \frac{k_o S_o^2}{2} = \frac{k_1 k_2 S_o^2}{2(k_1 + k_2)} = 0{,}037 \text{ Дж}.$$

2. Мощность. Задачи.

14А. Действуя силой 80 Н, человек поднимает из колодца глубиной 10 м ведро воды за 20 с. Какую мощность развивает при этом человек?

Решение:

Дано
$F = 80$ Н
$S = 10$ м
$t = 20$ с

N - ?

По определению мощность равна

$$N = \frac{A}{t}.$$

Для ее определения нужно найти работу $A = F\,S$, следовательно,

$$N = \frac{F\,S}{t} = \frac{80 \cdot 10}{20} = 40 \text{ Вт}.$$

15А. Клеть с грузом поднимается из шахты глубиной 180 м равноускоренно за 60 с. Определить мощность двигателя, если масса груженой клети $8 \cdot 10^3$ кг.

Решение:

Мощность определяется по формуле $N = \frac{A}{t}$, t

Дано

$h = 180м$

$t = 60\ с$

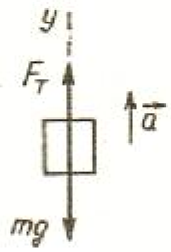
$m = 8 \cdot 10^3\ кг$

$N - ?$

где А – работа силы тяги Fтяг:

$$A = F_{тяг}\, h.$$

Сделаем рисунок.



По второму закону Ньютона сумма всех сил, действующих на клеть (а это сила тяги Fтяг и вес клети mg), равна произведению массы клети m на ускорение движения a:

$$\vec{F}_{тяг} + m\vec{g} = m\vec{a}. \qquad (1)$$

Направим ось Y вертикально вверх, тогда из уравнения (1) получим:

$$F_{тяг} - mg = ma$$

или

$$F_{тяг} = ma + mg = m(a+g) \qquad (2)$$

Для нахождения ускорения a воспользуемся формулами кинематики. Перемещение тела при равноускоренном движении определяется по формуле $h = at^2/2$. Отсюда $a = 2h/t^2$. Подставляя это выражение в (2), получим

$$F_{тяг} = m\left(\frac{2h}{t^2} + g\right).$$

Теперь легко найти искомую мощность:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{F_{тяг}\, h}{t} = \frac{mh}{t}\left(\frac{2h}{t^2} + g\right) = \frac{180 \cdot 8 \cdot 10^3}{60}\left(\frac{2 \cdot 180}{60^2} + 9{,}8\right) = 2{,}4 \cdot 10^5\ Вт =$$
$$= 2{,}4 \cdot 10^2\ кВт.$$

16А. Какую среднюю мощность развивает двигатель автомобиля, если он за 20 с набирает скорость 72 км/ч ? Масса автомобиля равна 1 т а коэффициент сопротивления движению $\mu = 0{,}05$.

Решение:

Дано:

$t = 20\ с$

$V = 72\ км/ч = 20\ м/с$

$m = 1\ т = 10^3\ кг$

$\mu = 0.05$

$N - ?$

Двигатель совершает работу A_1 против сил сопротивления (трения) и, кроме того, работу A_2, за счет которой увеличивается кинетическая энергия автомобиля(он разгоняется от нулевой скорости до скорости V). Общая работа есть:

$$A=A_1+A_2 = F_{тр}\, S + \frac{mV^2}{2}.$$

Сила трения, как обычно, равна $F_{тр} = \mu mg$.
Так как движение автомобиля равноускоренное, то из уравнений кинематики найдем перемещение:

$$S = \frac{at^2}{2},\quad V = at,\quad \text{откуда } S = \frac{Vt}{2}.$$

Теперь легко найти работу

$$A = F_{тр}\, S + \frac{mV^2}{2} = \mu mg\,\frac{Vt}{2} + \frac{mV^2}{2}.$$

Мощность есть $N = A/t$, следовательно,

$$N = \frac{\mu mgV}{2} + \frac{mV^2}{2t} = \frac{0{,}05\cdot 10^3\cdot 9{,}8\cdot 20}{2} + \frac{10^3\cdot 20^2}{2\cdot 20} = 14{,}9\cdot 10^3\,Вт \approx 15\ кВт.$$

17Б. Поезд массой $m = 784$ т начинает двигаться под уклон и за $t = 50$ с развивает скорость $V = 18$ км/ч. Коэффициент сопротивления равен $\mu = 0{,}005$, уклон $\varphi = 0{,}003$. Определить среднюю мощность локомотива, считая силу сопротивления пропорциональной силе нормального давления.

Решение: Сделаем рисунок.

Дано:

$m = 784$ т $= 7{,}84\cdot 10^5$ кг

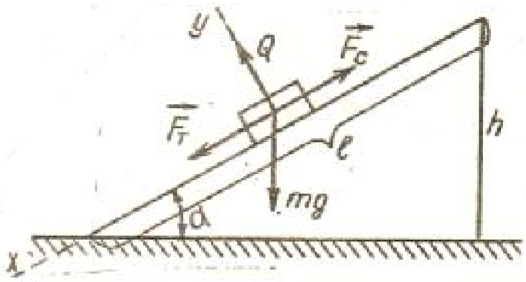
$V = 18$ км/ч $= 5$ м/с

$t = 50$ с

$\mu = 0{,}005$

$\varphi = 0{,}003$

$N_{ср}$ – ?



Напомним, что уклоном называется отношение высоты наклона плоскости к ее длине, т.е. $\varphi = h/b = \mathrm{tg}\,\alpha \approx \sin\alpha$,
где α – угол наклона плоскости к горизонту.
Среднюю мощность, развиваемую силой тяги локомотива, можно определить по формуле $N_{ср} = F_{тяг} V_{ср}$
Силу тяги находим из уравнения второго закона Ньютона. На поезд действуют следующие силы: сила тяги $\vec{F}_{тяг}$, сила тяжести $m\vec{g}$, сила

нормальной реакции опоры $\vec{Q}$ и сила сопротивления движению $\vec{F_c}$. Выберем направление осей координат (см.рис.) и запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на оси X и Y.

$$X:\ F_{тяг} + mg\sin\alpha - F_c = ma \qquad (1)$$

$$Y:\ Q - mg\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

Во втором уравнении справа стоит ноль, т.к. по оси Y поезд не двигается. Сила сопротивления Fc по условию задачи пропорциональна силе нормального давления Q:

$$F_c = \mu Q \qquad (3)$$

Из уравнения (2) имеем: $Q = mg\cos\alpha$

Подставляя это выражение для Q в (3), получим

$$F_c = \mu Q = \mu mg\cos\alpha \qquad (4)$$

Теперь уравнение (1) можно записать в виде (используя для Fc выражение (4)):

$$F_{тяг} = ma - mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha \qquad (5)$$

Ускорение a найдем из уравнений кинематики:

$$V = at,\ a = \frac{V}{t}\ . \qquad (6)$$

$\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ выразим через уклон φ :

$$\sin\alpha = \varphi,\quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\varphi^2} \approx 1 \qquad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (5), получим:

$$F_{тяг} = m\frac{V}{t} - mg\varphi + \mu mg\sqrt{1-\varphi^2} \approx \frac{mV}{t} + mg(\mu - \varphi) \qquad (8)$$

Для нахождения мощности нам осталось найти среднюю скорость движения Vср. Так как в начале движения поезд покоился ($V_{нач}=0$), а в конце имел скорость V, то $V_{ср} = \frac{V_{нач} + V}{2} = \frac{V}{2}$.

Окончательно для мощности получим:

$$N_{ср} = \frac{V}{2}\left(m\frac{V}{t} - mg\varphi + \mu mg\sqrt{1-\varphi^2}\right) = \frac{V}{2}\left[\frac{mV}{t} + mg(\mu - \varphi)\right] =$$

$$\frac{5}{2}\left[\frac{7{,}84\cdot10^5\cdot5}{50} + 7{,}8\cdot10^5\cdot9{,}8(0{,}005 - 0{,}003)\right] = \frac{7{,}84\cdot10^5\cdot5}{2}(0{,}1 +$$

$$+ 9{,}8\cdot2\cdot10^{-3}) = 2{,}34\cdot10^5\ Вт \approx 200\ кВт.$$

186. Уклон участка шоссе равен 1 м на каждые 20 м пути. Спускаясь под уклон при выключенном двигателе, автомобиль движется равномерно со скоростью 60 км/ч. Определить мощность двигателя автомобиля, поднимающегося по этому уклону с той же скоростью. Масса

автомобиля 1,5 т.

Решение: Сделаем рисунок.

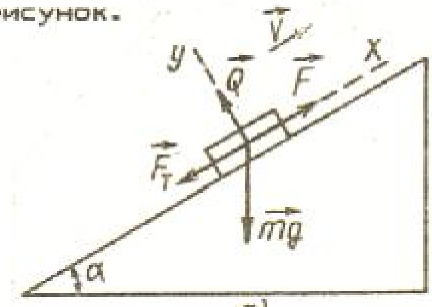
Дано:

$\frac{h}{\ell} = \sin\alpha = \frac{1}{20} = 0{,}05$

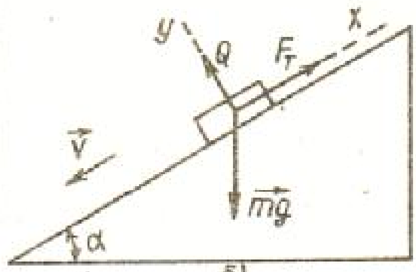
$V = 60$ км/ч ≈ 17 м/с

$m = 1{,}5$ т $= 1{,}5\cdot10^3$ кг

N – ?



а)



б)

На рис. в) изображено движение автомобиля вниз (равномерное движение со скоростью 60 км/ч). При этом на автомобиль действуют ри силы: сила тяжести $\vec{mg}$, сила трения Fтр и сила нормальной реакции опоры $\vec{Q}$. Так как движение равномерное, то по первому закону Ньютона сумма всех сил, действующих на автомобиль, равна нулю. Выберем направление осей координат (см.рис.) и запишем уравнение первого закона Ньютона в проекциях на ось X:

$$F_{тр} - mg\sin\alpha = 0 \quad \text{или} \quad F_{тр} = mg\sin\alpha \; . \qquad (1)$$

На рис. а) изображено движение ав~омобиля вверх с постоянной скоростью 60 км/ч. При этом на автомобиль действуют четыре силы: сила тяжести $\vec{mg}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{Q}$ и сила тяги $\vec{F}$. Выбирая направление осей (см.рис.) и записывая уравнение первого закона Ньютона (т.к. автомобиль движется равномерно) в проекциях на ось X, получим

$$F - F_{тр} - mg\sin\alpha = 0$$

или

$$F = F_{тр} + mg\sin\alpha \; .$$

Подставляя сюда выражение для Fтр из уравнения (1), будем иметь:

$$F = F_{тр} + mg\sin\alpha = 2\,mg\sin\alpha \qquad (2)$$

Мощность, развиваемая ı игателем автомобиля при его равномерном движении, определяется по формуле

$$N = F\,V,$$

где F – сила тяги, V – скорость автомобиля.

Подставляя сюда выражение для F из (2), окончательно для мощности получим:

$N = FV = 2mg\ \sin\alpha\, V = 2\cdot 1{,}5\cdot 10^3\cdot 9{,}8\cdot 0{,}05\cdot 17 = 24{,}5\cdot 10^3$ Вт ≈ 25 кВт

19А. Моторы электропоезда при движении со скоростью $V = 54$ км/ч потребляют мощность $N = 900$ кВт. К.П.Д. моторов и передающих механизмов $\eta = 0{,}8$. Найти силу тяги моторов.

Решение:

Дано:

$V = 54$ км/ч $= 15$ м/с

$N = 900$ кВт $= 9\cdot 10^5$ Вт

$\eta = 0{,}8$

$F_{тяг}$ – ?

Коэффициентом полезного действия (КПД) называется отношение полезной работы или мощности к потребляемой:

$$\eta = \frac{N_{пол}}{N} \qquad (1)$$

При движении электропоезда с постоянной скоростью V развиваемая моторами мощность (полезная мощность) равна:

$$N_{пол} = F_{тяг}\, V\ . \qquad (2)$$

Отсюда $F_{тяг} = \dfrac{N_{пол}}{V}$ или, подставляя выражение для $N_{пол}$ из уравнения (1):

$$F_{тяг} = \frac{N_{пол}}{V} = \frac{\eta\, N}{V} = \frac{0{,}8\cdot 9\cdot 10^5}{15} = 4{,}8\cdot 10^4\ \text{Н} = 48\ \text{кН}$$

20Б. Велосипедист въезжает в гору с постоянной скоростью. Длина шатуна педали   = 25 см, время полного оборота шатуна $t = 2$ с. Средняя сила давления ноги на педаль $F = 147$ Н. Найти мощность N, которую развивает велосипедист.

Решение:

Сделаем рисунок

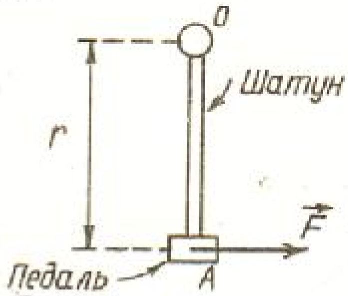
Дано:

$r = 25$ см $= 0{,}25$ м

$t = 2$ с

$F = 147$ Н

N – ?



Мощность, развиваемая велосипедистом, равна

$$N = \frac{A}{t_1},$$

где A – работа постоянной силы F на расстоянии S, т.е. $A = FS$,

t_1 – время движение. Расстояние S, на котором действует сила F, можно определить, умножив длину окружности $2\pi r$ на число оборотов педали за время t_1. По условию задачи шатун делает один оборот за время t, следовательно, за t_1 он сделает $n = \frac{t_1}{t}$ оборотов. Таким образом $S = 2\pi r n = 2\pi r \frac{t_1}{t}$.

Используя это выражение нетрудно найти искомую мощность:

$$N = \frac{A}{t_1} = \frac{FS}{t_1} = \frac{F\,2\pi r\,t_1}{t_1\,t} = \frac{F\,2\pi r}{t} \approx \frac{147\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}25}{2} \approx 115 \text{ Вт}$$

21Б. Горный ручей с сечением потока S образует водопад высотой h. Скорость течения воды в ручье V. Найти мощность водопада.

Решение:

Дано:

S;

h;

Vo;

N – ?

Мощность водопада равна, очевидно, работе, которую он может совершить в одну секунду, при полном переходе его кинетической энергии в другой вид энергии

$$N = \frac{mV^2}{2t} \qquad (1)$$

где m – масса воды, проходящая через поперечное сечение ручья S за время t, V – скорость воды у основания водопада. Масса m воды равна плотности воды ρ, умноженной на объем, протекающий через сечение S со скоростью V за время t. Этот объем есть

$$\mathcal{V} = S\,V_0\,t$$

Или для массы

$$m = \rho S V_0 t \qquad (2)$$

Скорость воды у основания водопада найдем из закона сохранения энергии (сумма кинетической и потенциальной энергии воды на вершине водопада равна кинетической энергии воды у основания водопада):

$$\frac{mV_0^2}{2} + mgh = \frac{mV^2}{2}, \qquad (3)$$

где Vo – скорость воды в ручье, h – высота водопада.

Подставляя в (1) выражение для m и V_1 из (2) и (3), получим:

$$N = \frac{mv^2}{2t} = \rho\frac{SV_0 t}{t}\left(\frac{V_0^2}{2} + gh\right) = \rho S V_0\left(gh + \frac{V_0^2}{2}\right).$$

3. <u>Закон сохранения энергии. Задачи</u>.

22А. Камень брошен под некоторым углом к горизонту со скоростью V_1. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на какой высоте от точки бросания скорость камня уменьшится вдвое.

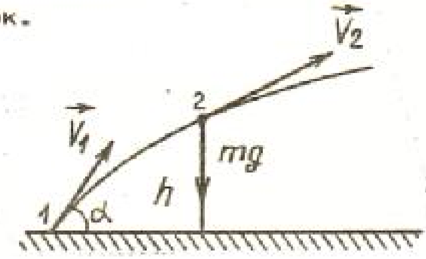
Решение: Сделаем рисунок.

Дано:

V_1;

$V_2 = \frac{V_1}{2}$;

$h - ?$



Многие задачи динамики в курсе элементарной физики можно решить двумя способами: или с помощью уравнения второго закона Ньютона, или с помощью закона сохранения энергии. Данную задачу проще решить, применив уравнение закона сохранения энергии:

$$E_1 = E_2.$$

За уровень отсчета потенциальной энергии принимаем поверхность Земли. В начальный момент тело обладало только кинетической энергией (имея скорость V_1):

$$E_1 = E_{нач} = \frac{mV_1^2}{2}.$$

В конечный момент тело находится на высоте h и имеет по условию задачи скорость $V_2 = V_1/2$. Таким образом,

$$E_2 = E_{кон} = \frac{mV_2^2}{2} + mgh = \frac{mV_1^2}{8} + mgh.$$

Во время полета тела на него не действуют никакие внешние силы (так как сопротивлением мы пренебрегаем по условию задачи, а единственная, действующая на тело сила, сила тяжести mg в системе Земля–тело считается внутренней и ее работа учитывается изменением потенциальной энергии). Закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{mV_1^2}{8} + mgh = \frac{mV_1^2}{2} \quad \text{или} \quad mgh = \frac{3mV_1^2}{8}$$

Отсюда легко найти искомую высоту:

$$h = \frac{3V_1^2}{8g}$$

23А. Конькобежец, разогнавшись до скорости V= 27 км/ч, въезжает на ледяную гору. На какую высоту от начального уровня въедет конькобежец с разгона, если подъем горы составляет h = 0,5 м на каждые S= 10 м по горизонтали и коэффициент трения коньков о лед $\mu = 0,02$?

Решение: Сделаем рисунок.

Дано:

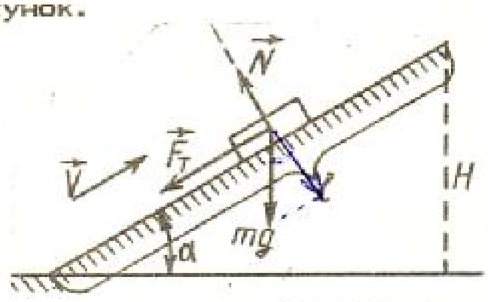
V=27 км/ч = 7,5 м/с

h = 0,5 м

S = 10 м

$\mu = 0,02$

H - ?



Подъем (или уклон) горы есть

$$\varphi = \frac{h}{S} \approx \sin\alpha$$

Выберем уровень начала отсчета потенциальной энергии на поверхности Земли. Тогда у подножья горы конькобежец обладает только кинетической энергией $E_{кин} = mV^2/2$. Когда конькобежец поднимется на высоту H (при этом он остановится, т.е. его скорость будет равна нулю), он будет обладать лишь потенциальной энергией $E_{пот} = mgH$. По закону сохранения энергии разность конечной и начальной энергий тела равна работе внешних сил. Во время движения конькобежца в гору на него действует сила трения $F_{тр}$, против которой и совершается работа:

$E_{нач} - E_{кон} = A$, $E_{кон} = E_{пот}$, $E_{нач} = E_{кин}$, $A = F_{тр}\ell$,

где ℓ - перемещение конькобежца при подъеме на высоту H:

$$\ell = H/\sin\alpha .$$

Закон сохранения энергии принимает вид:

$$E_{нач} - E_{кон} = E_{кин} - E_{пот} = A = F_{тр}\ell$$

или

$$\frac{mV^2}{2} - mgh \quad \frac{F_{тр}H}{\sin\alpha}$$

Отсюда найдем H:

$$mgH + F_{тр}\frac{H}{\sin\alpha} = \frac{mV^2}{2},$$

$$H\left(mg + \frac{F_{тр}}{\sin\alpha}\right) = \frac{mV^2}{2}$$

$$H = \frac{mV^2}{2\left(mg + \frac{F_{тр}}{\sin\alpha}\right)} \qquad (1)$$

Сила трения Fтр по определению равна произведению коэффициента трения на силу нормального давления:

$$F_{тр} = \mu N \qquad (2)$$

Направим ось Y как показано на рисунке. Так как по оси Y конькобежец не двигается, то по первому закону Ньютона сумма всех сил по этой оси равна 0, т.е.:

$$N - mg \cos \alpha = 0$$

Отсюда найдем N : $N = mg \cos \alpha$. Но при $\sin \alpha = 0,05$ значение $\cos \alpha = 0,9988 \approx 1$. Подставляя это выражение в (2), а получившееся в (1), получим:

$$H = \frac{mV^2}{2\left(mg + \dfrac{\mu mg \cos \alpha}{\sin \alpha}\right)} = \frac{V^2}{2\left(g + \dfrac{\mu g S}{h}\right)} = \frac{V^2}{2g\left(1 + \dfrac{\mu S}{h}\right)} .$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$H = \frac{7,5^2}{2 \cdot 9,8 \cdot \left(1 + \dfrac{0,02 \cdot 10}{0,5}\right)} = 2 \text{ м.}$$

24А. Самолет массой 10 кг летит горизонтально на высоте H=1200 м со скоростью V_1 = 50 м/с. При выключенном моторе самолет переходит в планирующий полет и достигает Земли со скоростью V_2= 25 м/с. Определить среднюю силу сопротивления воздуха при спуске, принимая длину спуска равной 8 км.

<u>Решение</u>:

<u>Дано</u>:

$m = 10^3$ кг

H = 1200 м

V_1=50 м/с

V_2=25 м/с

S = 8 км = $8 \cdot 10^3$ м

Fсопр – ?

Воспользуемся законом сохранения энергии:

$$E_{кон} - E_{нач} = A,$$

где Екон – полная механическая энергия в конце полета (при приземлении), Енач – полная механическая энергия самолета в начале планирования. А – работа внешних сил (силы сопротивления воздуха). Эти величины равны:

$$E_{кон} = \frac{mV_2^2}{2},$$

где V_2 – скорость самолета при приземлении.

$$E_{нач} = \frac{mV_1^2}{2} + mgH,$$

где V_1– начальная скорость самолета, H– высота, на которой находится самолет (за уровень начала отсчета потенциальной энергии взята поверхность Земли).

$$A = -F_{сопр} S,$$

где $F_{сопр}$ – средняя сила сопротивления, которая направлена противоположно перемещению, S– длина спуска.

Закон сохранения принимает вид:

$$E_{кон} - E_{нач} = A,$$

$$\frac{mV_2^2}{2} - \left(\frac{mV_1^2}{2} + mgH\right) = -F_{сопр} S.$$

Отсюда легко найти $F_{сопр}$:

$$F_{сопр} = \frac{\frac{mV_1^2}{2} + mgH - \frac{mV_2^2}{2}}{S} = \frac{m(V_1^2 - V_2^2) + 2gmH}{2S} =$$

$$= \frac{10^3(50^2 - 25^2) + 2\cdot 9{,}8\cdot 1200\cdot 10^3}{2\cdot 8\cdot 10^3} = 1587\ Н \approx 1{,}6\ кН$$

25А. Тело массой 1 кг движется по столу, имея в начальной точке скорость V_0= 2м/с. Достигнув края стола, высота которого h = 1 м, тело падает. Коэффициент трения тела о стол μ= 0,1. Определить количество тепла, выделившегося при ударе о Землю. Перемещение тела по столу S = 2 м.

Решение:

Дано:

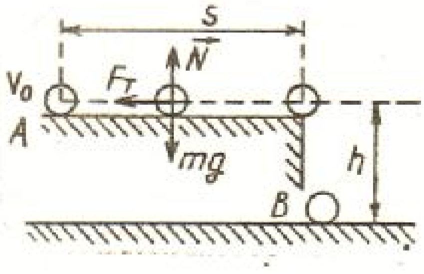
m = 1 кг ; h = 1 м

V_0= 2 м/с; μ = 0,1

S = 2 м ;

Q – ?

Сделаем рисунок.



Тело во время своего движения переместилось из точки A (начальное положение) в точку B (конечное положение). По закону сохранения энергии разность между полной механической энергией тела в конечном положении и энергией его в начальном положении равна работе внешних сил плюс тепло, выделяющееся при ударе тела о Землю (оно равно работе силы сопротивления грунта при вдавливании тела в него):

$$E_{кон} - E_{нач} = A + Q \qquad (1)$$

Выберем уровень начала отсчета потенциальной энергии на поверхности Земли. Тогда $E_{кон} = 0$, т.к. тело находится на Земле и покоится.

$$E_{нач} = \frac{mV_0^2}{2} + mgh,$$

т.к. в начальный момент тело имеет скорость V_0 и находится на высоте h над Землей. Во время движения тела на него действует внешняя сила $F_{тр}$ на участке S, следовательно,

$$A = -F_{тр} S \ , \qquad (2)$$

где $F_{тр}$ – сила трения, которая направлена противоположно перемещению. Сила трения равна $F_{тр} = \mu N = \mu mg$.

Так как работа совершается против сил сопротивления, то величина A, как видно из выражения (2) отрицательна. Точно так же величина Q, которая равна работе против сил сопротивления грунта, тоже должна быть отрицательна, т.е. входить в закон сохранения энергии (1) со знаком минус. Окончательно, закон сохранения энергии принимает вид:

$$E_{кон} - E_{нач} = A - Q,$$

$$-\frac{mV_0^2}{2} - mgh = -F_{тр} S - Q,$$

$$\frac{mV^2}{2} + mgh = \mu mgS + Q.$$

Отсюда легко найти Q:

$$Q = \frac{mV^2}{2} + mgh - \mu mgS = \frac{mV_0^2}{2} + mg(h - \mu S) \quad \frac{1\cdot 2^2}{2} + 1\cdot 9{,}8(1 - 0{,}1\cdot 2) \approx$$
$$\approx 9{,}8 \text{ Дж}.$$

26Б. Баба копра массой 400 кг падает на сваю массой 100 кг, вбитую в грунт. Определить среднюю силу сопротивления грунта, если известно, что при каждом ударе свая погружается в грунт на 5 см, а высота поднятия копра 1,5 м. Удар неупругий.

Решение: Сделаем рисунок.

Дано:

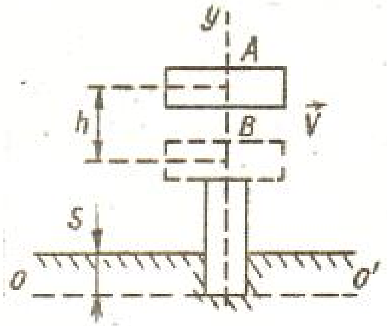
$m_1 = 400$ кг

$m_2 = 100$ кг

$S = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м

$h = 1{,}5$ м

F - ?



По закону сохранения энергии изменение механической энергии сваи вместе с бабой копра равно работе внешних сил (силы сопротивления грунта):

$$E_{кон} - E_{нач} = A.$$

Начальным положением сваи вместе с бабой копра будем считать их положение в момент удара вабы копра о свав.

Конечным положением сваи вместе с бабой копра будем считать их положение, когда свая (вместе с бабой копра) спустилась в грунт на глубину S. За уровень отсчета потенциальной энергии выберем уровень OO' (см.рис.). Тогда в конечном положении полная механическая энергия сваи с бабой копра равна нулю, т.к. свая остановилась. В начальном положении полная механическая энергия сваи с бабой копра складывается из их кинетической энергии

$$E^{(к)} = \frac{(m_1 + m_2)U^2}{2},$$

где U– начальная скорость движения сваи вместе с бабой копра после их неупругого соударения (слипания), и потенциальной энергии

$$E = (m_1 + m_2)gS$$

(так как в начальный момент свая вместе с бабой копра находятся на высоте S над уровнем OO').

Работа силы сопротивления грунта равна

$$A = - FS,$$

где F – сила сопротивления грунта, которая направлена противоположно перемещению, S – перемещение сваи.

Закон сохранения энергии теперь принимает вид

$$0 - [\frac{(m_1 + m_2)U^2}{2} + (m_1 + m_2)gS] = - F\,S.$$

Выразим отсюда F:

$$F=\frac{(m_1+m_2)U^2}{2S}+(m_1+m_2)g \qquad (1)$$

В этом выражении неизвестно только U. Для того, чтобы определить эту скорость, запишем для бабы копра и сваи уравнение закона сохранения импульса для неупругого удара в скалярной форме относительно вертикальной оси Y (см.рис.):

$$m_1V_1 = (m_1 + m_2)U, \qquad (2)$$

где V_1– скорость бабы копра перед ударом о сваю. Эту скорость найдем из закона сохранения энергии для бабы копра при ее движении из верхнего положения до удара о сваю:

$$E_B = E_A \qquad (3)$$

где $E_B = \frac{m_1V_1^2}{2}$ – кинетическая энергия бабы копра в точке B,

$E_A=m_1gh$ – потенциальная энергия бабы копра в точке A (по отношению к уровню потенциальной энергии, проходящему через точку B). Уравнение (3) запишется теперь в виде:

$$\frac{m_1V_1^2}{2} = m_1gh$$

откуда

$$V_1^2 = 2gh \quad \text{или} \quad V_1= \sqrt{2gh}$$

Подставляя это выражение в уравнение (2), для U получим

$$U =\frac{m_1V_1}{m_1 + m_2} =\frac{m_1\sqrt{2gh}}{m_1 + m_2} \quad . \qquad (4)$$

Из уравнения (1), используя (4), окончательно имеем для F:

$$F =\frac{(m_1 +m_2)}{2S}\,\frac{m_1^2\, 2gh}{(m_1+ m_2)^2} + (m_1 + m_2)g =$$

$$=\frac{m_1^2 gh}{S(m_1 +m_2)} + (m_1 +m_2)g =\frac{(4\cdot10^2)^2\, 9{,}8\cdot1{,}5}{5\cdot10^{-2}(4\cdot10^2+10^2)} + (4\cdot10^2+ 10^2)\; 9{,}8 =$$

$$=9{,}9\cdot10^4\ Н.$$

27Б. Брусок скользит сначала по наклонной плоскости длиной 42 см и высотой 7 см, а потом по горизонтальной плоскости, после чего останавливается. Определить коэффициент трения, считая его везде одинаковым, если по горизонтальной плоскости брусок проходит до остановки расстояние 142 см.

Решение: Сделаем рисунок.

<u>Дано:</u>

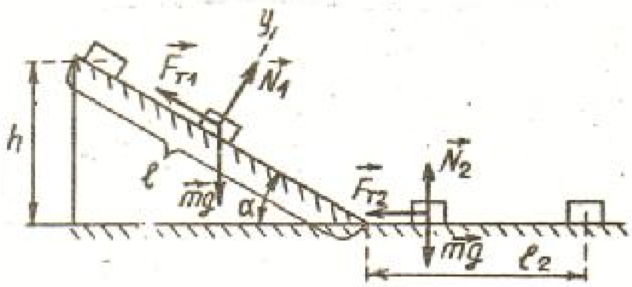
ℓ_1 = 42 см = 0,42 м

ℓ_2 = 142 см = 1,42 м

h = 7 см = 0,07 м

---

k - ?



При движении по наклонной плоскости на брусок действуют: сила тяжести mg, сила нормальной реакции опоры N_1, сила трения $F_{тр}$. По определению сила трения равна

$$F_{тр_1} = \mu N_1.$$

Для того, чтобы найти N_1, направим ось Y, как указано на рисунке, и запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на ось Y:

$$N_1 - mg\cos\alpha = 0$$

(справа стоит нуль, т.к. тело по оси Y не двигается).

Из последнего равенства имеем:

$$N_1 = mg\cos\alpha.$$

Тогда для $F_{тр_1}$ получим:

$$F_{тр_1} = \mu N_1 = \mu mg\cos\alpha. \qquad (1)$$

При движении по горизонтальной поверхности на брусок действуют: сила тяжести mg, сила нормальной реакции опоры N_2 сила трения $F_{тр2}$. Сила трения, как обычно, равна

$$F_{тр2} = \mu N_2$$

Так как тело в направлении, перпендикулярном горизонтальной поверхности, не двигается, то сумма всех сил в проекциях на это направление равна нулю:

$$N_2 - mg = 0 \qquad \text{или } N_2 = mg$$

$$\text{и } F_{тр_2} = \mu N_2 = \mu mg \qquad (2)$$

Запишем для бруска закон сохранения энергии:

$$E_{кон} - E_{нач} = A, \qquad (3)$$

где $E_{кон}$ – полная механическая энергия бруска в конечном положении: $E_{кон} = 0$ (т.к. в конечном положении брусок покоится и нулевой уровень отсчета потенциальной энергии выбран на горизонтальной плоскости), $E_{нач}$ – полная механическая энергия бруска в начальном положении, $E_{нач} = mgh$ (т.к. в начальном положении брусок покоится и находится на высоте h над нулевым уровнем отсчета потенциальной энергии), A – работа внешних сил (сил трения). Так как силы трения, как мы видели выше, на наклонном и горизонтальном участках различны, то работа А складывается из двух работ

$A = A_1 + A_2$, где $A_1 = -F_{тр_1} \ell_1$ – работа на участке ℓ_1

$A_2 = -F_{тр_2} \ell_2$ – работа на участке ℓ_2

Используя выражения (1) и (2) закон сохранения энергии (3) можно теперь переписать в виде:

$$0 - mgh = -F_{тр_1}\ell_1 - F_{тр_2}\ell_2 ,$$

$$mgh = \mu gm \cos\alpha\, \ell_1 + \mu mg\ell_2 .$$

Отсюда найдем μ:

$$mgh = \mu(\cos\alpha\, \ell_1 + \ell_2)\, mg,$$

$$\mu = \frac{h}{\ell_2 + \ell_1 \cos\alpha} .$$

$\cos\alpha$ выразим через ℓ_1 и h (см. рис.):

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\ell_1^2 - h^2}{\ell_1^2}} = \frac{\sqrt{\ell_1^2 - h^2}}{\ell_1} \quad \text{, следовательно}$$

$$\ell_1 \cos\alpha = \sqrt{\ell_1^2 - h^2} .$$

Окончательно получим:

$$\mu = \frac{h}{\ell_2 + \sqrt{\ell_1^2 - h^2}} = \frac{0{,}07}{1{,}42 + \sqrt{0{,}42^2 - 0{,}07^2}} \approx 0{,}04.$$

28Б. Для определения скорости пули применяется баллистический маятник (см. рис.), состоящий из деревянного бруска, подвешенного на легком стержне. При выстреле в горизонтальном направлении пуля массой m попадает в брусок и застревает в нем. Какова была скорость пули, если маятник поднимается на высоту h ? Масса бруска равна M; трение в подвесе и массу стержня не учитывать. Какая часть кинетической энергии пули переходит в теплоту ?

Решение:

Сделаем рисунок.

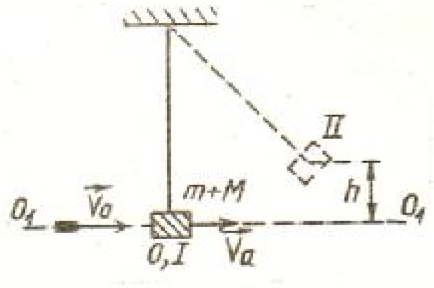
Дано:

m;

h;

M;

V_0–? x–?



Это одна из распространенных задач на неупругий удар двух тел, в результате которого изменяется их положение по высоте. Неупругим ударом называется удар, при котором происходит частичное или полное превращение механической энергии во внутреннюю. При неупругом ударе тел механическая энергия системы до соударения не равна механической энергии системы после удара; часть механической энергии расходуется на остаточную деформацию тел, вызывая их нагревание. Закон сохранения и превращения энергии для неупругого соударения тел имеет вид:

$$W_0 = W_2 + Q$$

Здесь W_0 и W_2 – полная механическая энергия системы (всех тел) до удара и после удара; Q – количество теплоты, выделившейся при ударе.

Задачи на неупругое соударение тел решаются на основании закона сохранения импульса и закона сохранения энергии. Составление этих уравнений представляет главную часть решения почти всех задач подобного типа.

В данном примере рассматриваются три состояния системы: первое – до удара, второе – сразу же после удара и третье – конечное состояние тел в крайнем положении.

На рисунке отмечаем эти состояния системы 0, I и II, искомую скорость пули до удара V_0, скорость V_1 бруска и пули сразу же после того, как удар закончился и тела начали двигаться вместе, и, наконец, высоту поъема маятника h. Напомним, что во всех задачах на соударение тел, как неупругое, так и упругое, когда нет специальных оговорок, предполагается, что удар происходит очень быстро и за время взаимодействия тела не успевают заметно сместиться. Иными словами, мы считаем, что скорость V_1 возникает мгновенно и во время удара маятник не отклоняется от вертикали. До удара – в положении 0 – пуля имела скорость $\vec{V_0}$, брусок покоился и система имела импульс $\vec{P} = m\vec{V_0}$, в конце удара – в положении I – пуля и брусок имеют скорость $\vec{V_1}$, импульс системы равен $\vec{P_1} = (M+m)\,\vec{V_1}$.

При нашем допущении относительно времени соударения можно считать, что во время удара внешние силы $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ не влияют на скорости тел и, следовательно, система тело–брусок замкнутая. Согласно закону сохранения импульса

$$\vec{P_0} = \vec{P_1}\ , \qquad mV_0 = (M+m)V_1 \qquad (1)$$

Приступим теперь к составлению уравнения закона сохранения механической энергии, который имеет место при переходе системы из положения I в положение II.

Выбрав уровень O_1O_1 отсчета потенциальной энергии по нижнему по–

положения тел и принимая во внимание, что при переходе системы из положения I в положение II внешние силы в системе тело-брусок-Земля работу не совершают, запишем формулу закона сохранения энергии:

$$W_2 - W_1 = 0$$

Учитывая, что

$$W_1 = \frac{(m+M)V_1^2}{2}, \qquad W_2 = (m+M)gh$$

получим окончательно:

$$(m+M)gh - \frac{(m+M)V_1^2}{2} = 0, \quad V_1^2 = 2gh \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) – (2) относительно начальной скорости пули, получим:

$$V_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}\ .$$

Чтобы ответить на второй вопрос задачи: найти $x = \frac{Q}{W_0}$ – т.е. ту часть кинетической энергии пули, которая перешла при ударе во внутреннюю энергию, нужно использовать закон сохранения и превращения энергии при переходе системы из состояния 0 в состояние I. Так как здесь происходит выделение теплоты, то

$$W_0 = W_1 + Q.$$

Следовательно,

$$x = \frac{W_0 - W_1}{W_0} \qquad (3)$$

Поскольку $W_0 = \frac{mV_0^2}{2}$, $W_1 = \frac{(m+M)V_1^2}{2}$, то согласно (3) имеем:

$$x = 1 - \frac{m+M}{m}\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^2 \qquad (4)$$

Исключая из уравнений (1) и (4) отношение скоростей, получим:

$$x = \frac{M}{m+M}\ .$$

29А. Два одинаковых абсолютно упругих шара движутся по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу со скоростями V_1 и V_2. С какими скоростями U_1 и U_2 будут двигаться шары после центрального абсолютно упругого удара ? Трением пренебречь.

Решение:

Дано:

$m_1 = m_2$;

V_1 ·

Запишем закон сохранения энергии для шаров, учтя при этом, что потенциальная энергия шаров в процессе взаимодействия не меняется и никакие внешние силы на

V_2 : шары не действуют (трения нет):

U_1, U_2 - ?

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{m_1U_1^2}{2} + \frac{m_2U_2^2}{2} \qquad (1)$$

В это уравнение входят две неизвестные величины - U_1 и U_2. Для того, чтобы их найти, необходимо еще одно уравнение. Запишем для упругого взаимодействия шаров закон сохранения импульса:

$$m_1V_1 - m_2V_2 = m_1U_1 + m_2U_2 \qquad (2)$$

При этом учтено, что второй шар двигается навстречу первому, его скорость равна $-V_2$.

Так как по условию задачи $m_1 = m_2$, то из (1) и (2) имеем:

$$\begin{cases} V_1^2 + V_2^2 = U_1^2 + U_2^2, \\ V_1 - V_2 = U_1 + U_2 . \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения U_1 ($U_1 = V_1 - V_2 - U_2$) и подставляя в первое, получим:

$$V_1^2 + V_2^2 = (V_1 - V_2 - U_2)^2 + U_2^2,$$

$$\cancel{V_1^2} + \cancel{V_2^2} = \cancel{V_1^2} - 2V_1V_2 + \cancel{V_2^2} - 2(V_1 - V_2)U_2 + U_2^2 + U_2^2,$$

$$U_2^2 - (V_1 - V_2)U_2 - V_1V_2 = 0,$$

$$(U_2)_{1,2} = \frac{(V_1 - V_2) \pm \sqrt{(V_1 - V_2)^2 + 4V_1V_2}}{2} = \frac{(V_1 - V_2) \pm (V_1 + V_2)}{2},$$

$$(U_2)_1 = \frac{V_1 - V_2 + V_1 + V_2}{2} = V_1, \quad (U_2)_2 = \frac{V_1 - V_2 - V_1 - V_2}{2} = -V_2 .$$

Так как скорость второго шара до взаимодействия была равна $-V_2$, то после взаимодействия она не может остаться такой же, т.е. второй корень лишний и $U_2 = V_1$.

Скорость U_1 равна:

$$U_1 = V_1 - V_2 - U_2 = V_1 - V_2 - V_1 = -V_2 .$$

Таким образом, после абсолютно упругого удара шары одинаковой массы обмениваются скоростями. Если до удара первый шар двигался слева направо со скоростью V_1, то после удара он будет двигаться в обратную сторону со скоростью V_2.

30А. Доказать, что при неупругом соударении двух тел, одно из которых покоится, их общая кинетическая энергия $E_a^{(к)}$ после соударения меньше, чем кинетическая энергия $E_1^{(к)}$ до соударения.

<u>Решение</u>: Так как одно из тел, допустим второе, имеющее массу

m_1 покоится, то кинетическая энергия $E_1^{(к)} = \dfrac{m_1 V_1^2}{2}$. Общую скорость
данных тел после их неупругого соударения (слипания) найдем из
уравнения закона сохранения импульсов тел

$$m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2} = \vec{V}(m_1 + m_2).$$

Так как $V_2 = 0$, то $m_1\vec{V_1} = \vec{V}(m_1+m_2)$. В проекции на ось X

$$m_1 V_1 = V(m_1 + m_2)$$

или

$$V = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2}.$$

Теперь легко найти $E_2^{(к)}$:

$$E_2^{(к)} = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2}$$

$$E_1^{(к)} = \frac{(m_1 + m_2)}{2}\left(\frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{m_1^2 V_1^2}{2(m_1+m_2)} = \frac{m_1 V_1^2}{2}\,\frac{m_1}{m_1+m_2}.$$

Так как $\dfrac{m_1}{m_1+m_2} < 1$, то $E_1^{(к)} > E_2^{(к)}$.

Разность этих энергий $(E_1^{(к)} - E_2^{(к)})$ превратилась во внутреннюю энергию
взаимодействовавших тел (в тепло).

31Б. Два груза массами m = 10 кг и m = 15 кг подвешены на нитях
ℓ = 2 м так, что грузы соприкасаются между собой. Меньший груз
был отклонен на угол α = 60° и отпущен. На какую высоту поднимутся
оба груза после удара. Удар грузов считать неупругим. Какое коли-
чество тепла при этом выделяется ?

Сделаем рисунок

<u>Решение:</u>

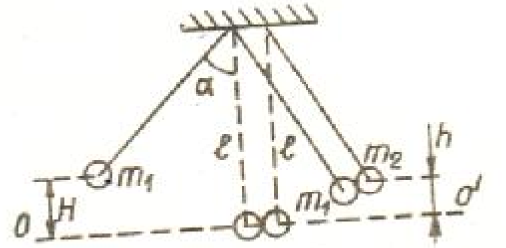
Дано:

m_1 = 10 кг

m_2 = 15 кг

ℓ = 2 м

α = 60



---

h - ? Q - ?

Высоту h подъема грузов после удара (после их слипания) можно
найти из закона сохранения энергии. Однако нельзя считать, что
начальным положением системы является положение, когда шар откло-
нен на угол α, а конечным - когда оба слипшихся шара поднялись на
высоту h. Дело в том, что взаимодействие шаров неупругое (они
слипаются), при этом происходит выделение тепла (в процессе сли-

пания шары деформируются и работа сил деформации переходит во внутреннюю энергию, т.е. закон сохранения механической энергии не выполняется). Этот закон будет выполняться лишь для процесса отклонения уже слипшихся шаров вправо до высоты h. Т.е. начальным положением будем считать положение уже слипшихся после взаимодействия шаров на нулевом уровне отсчета потенциальной энергии OO' (см. рис.). Конечным положением системы будет положение шаров на высоте h. Закон сохранения механической энергии для этого процесса имеет вид

$$E_{кон} - E_{нач} = 0 \qquad (1)$$

Справа стоит нуль, т.к. в процессе движения шаров никакие внешние силы на них не действуют, т.е. работа A = 0. Так как в крайнем правом положении на высоте h шары покоятся (V=0), то Екон есть просто потенциальная энергия слипшихся шаров, находящихся на высоте h над нулевым уровнем: $E_{кон} = (m_1 + m_2)gh$.

В начальном положении шары находятся на нулевом уровне потенциальной энергии и, поэтому, Енач есть просто кинетическая энергия слипшихся шаров: $E_{нач} = \dfrac{(m_1 + m_2)U^2}{2}$, где U – скорость, которую имеют слипшиеся шары после взаимодействия.

Таким образом, вместо (1) имеем:

$$(m_1 + m_2)gh = \frac{(m_1 + m_2)U^2}{2} \quad \text{или} \quad h = U^2/2g \qquad (2)$$

Скорость U найдем из закона сохранения импульса. По условию задачи шар m отклонили на угол α и отпустили. В процессе своего движения он опускается и приобретает скорость. Будем считать, что он подлетает ко второму шару со скоростью V. Эту скорость можно найти из закона сохранения энергии для шара m_1. В начальном положении он находился на высоте H и покоился, при этом он обладал энергией $E'_{нач} = m_1 gH$. В конечном положении до момента взаимодействия со вторым шаром шар m_1 находится на нулевом уровне потенциальной энергии и, следовательно, $E'_{кон} = \dfrac{m_1 V^2}{2}$. Таким образом, по закону сохранения энергии $m_1 gH = \dfrac{m_1 V^2}{2}$.

Учитывая, что $H = (\ell - \ell\cos\alpha) = \ell(1-\cos\alpha)$, получим:

$$m_1 g\ell(1-\cos\alpha) = \frac{m_1 V^2}{2}, \quad g\ell(1-\cos\alpha) = \frac{V^2}{2},$$

$$gl2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{V^2}{2}, \quad V^2 = 4gl\sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad V = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl} \qquad (3)$$

Теперь, зная скорость шара m_1 при подлете к шару m_2, можно записать закон сохранения импульса:

$$m_1V = (m_1 + m_2)U.$$

Отсюда, учитывая (3), имеем:

$$U = \frac{m_1V}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl}}{m_1 + m_2} \qquad (4)$$

Подставляя это выражение для U в уравнение (2), найдем:

$$h = \frac{U^2}{2g} = \frac{2m_1^2\, l\sin^2\frac{\alpha}{2}}{(m_1 + m_2)} = \frac{2\cdot 10^2\cdot 2^2\cdot\left(1/2\right)^2}{(10 + 15)^2} = 0{,}16 \text{ м}$$

Как уже отмечалось выше, в процессе неупругого взаимодействия шаров закон сохранения механической энергии не выполняется, часть механической энергии переходит во внутреннюю. Для того чтобы найти количество этого тепла Q, необходимо найти разность механической энергии в начальный и конечный моменты взаимодействия, т.е.

$$Q = E''_{нач} - E''_{кон} \qquad (5)$$

где $E''_{нач} = \frac{m_1V^2}{2}$ – энергия системы до взаимодействия (шар m покоится, оба шара находятся на нулевом уровне потенциальной энергии), $E''_{кон} = \frac{(m_1 + m_2)U^2}{2}$ – энергия системы после взаимодействия (слипания). Уравнение (5) перепишется в виде:

$$Q = \frac{m_1V^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)U^2}{2}$$

или, учитывая (4) и (3),

$$Q = \frac{m_1V^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)}{2}\left(\frac{m_1V}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{m\,V^2}{2} - \frac{m_1^2\,V^2}{2(m_1+m_2)} =$$

$$= \frac{m_1V^2}{2}\,\frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\,gl\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\cdot 10\cdot 15}{(10+15)}\cdot 9{,}8\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 58{,}8 \text{ Дж.}$$

32В. В неподвижный шар ударяется не по линии центров другой такой же шар. Под каким углом разлетятся шары, если они абсолютно упругие и абсолютно гладкие ?

Решение: Так как взаимодействие шаров абсолютно упругое, то для них выполняется как закон сохранения импульсов, так и закон сохранения энергии. Запишем эти законы:

$$m_1\vec{V_1} = m_1\vec{V_1'} + m_1\vec{V_2'},$$

$$m_1V_1^2 = m_1V_1'^2 + m_1V_2'^2,$$

где V_1 — начальная скорость первого удара (второй шар покоится), V_1' и V_2' — скорости шаров после удара.

Сократив ова уравнения на массу, получим систему:

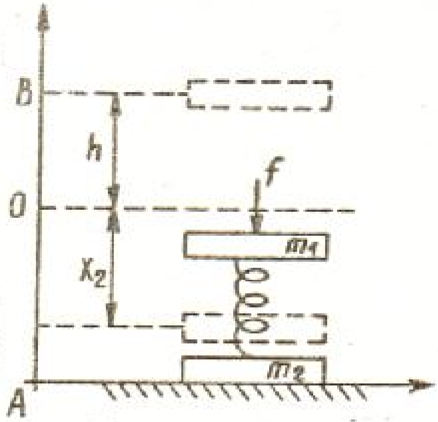
$$\begin{cases} \vec{V_1} = \vec{V_1'} + \vec{V_2'} \\ V_1^2 = V_1'^2 + V_2'^2 \end{cases} \qquad (1)$$

Первое из этих уравнений гоарит о том, что вектор $\vec{V_1}$ равен сумме векторов V_1' и V_2'. Вектора, как известно, складываются по правилу параллелограмма. Модуль вектора $\vec{V_1}$ может быть найден по теореме косинусов, т.е.

$$V_1^2 = V_1'^2 + V_2'^2 - 2V_1'V_2' \cos\alpha,$$

где α — угол между векторами $\vec{V_1'}$ и $\vec{V_2'}$. Для того, чтобы это уравнение удовлетворяло системе (1) (т.е. совпадало со вторым уравнением системы), необходимо, чтобы $\cos\alpha = 0$, т.е. $\alpha = 90$. Таким образом, в результате описанного в задаче взаимодействия шары разлетятся под прямым углом.

33В. Две пластинки с массами m_1 и m_2 соединены пружиной и расположены таким образом, что пластинка m_1 находится над пластинкой m_2, лежащей на столе (см.рис.). С какой силой нужно надавить на верхнюю пластинку, чтобы после прекращения действия силы верхняя пластинка, подпрыгнув, приподняла и нижнюю ? Массой пружины пренебречь.



Решение:

На рисунке отрезок АО соответствует длине пружины в недеформированном состоянии (при $m_1=0$), а (АО-х) равно длине пружины после того, как на нее подействовала сила F, которая равна силе f, с которой нужно надавить на верхнюю пластину, плюс сила тяжести, действующая на верхнюю пластину:

$$F = f + m_1g \qquad (1)$$

Если мы перестанем давить на пластину, то она устремится вверх, растягивая пружину, и достигнет точки В. Пластина m_1 сможет отрываться от стола, если максимальная сила натяжения пружины будет по крайней мере равна m_2g (или больше). Как известно, сила натяжения (или сжатия) пружины пропорциональна удлинению (закон Гука). Поэтому сила F, определяемая уравнением (1), будет равна

$$F = kx \tag{2}$$

где k – коэффициент пропорциональности. Энергия сжатой пружины есть $kx^2/2$. Эта энергия пойдет на изменение потенциальной энергии пластины m_1, которое, очевидно, равно $m_1g(x+h)$, где h=OB, и на растяжение пружины на длину h. Таким образом,

$$\frac{kx^2}{2} = m_1g(x+h) + \frac{kh^2}{2} \tag{3}$$

Условие задачи требует, чтобы

$$kh \geqslant m_2g \tag{4}$$

Выражая из этого уравнения h и подставляя его в (3), получим

$$x^2 - \frac{2m_1g}{k}x - \left(\frac{m_2^2g^2}{k^2} + \frac{2m_1m_2g^2}{k^2}\right) = 0.$$

Откуда $x = \frac{m_1g}{k} \pm \frac{(m_1+m_2)}{k}g$

Поскольку x – положительная величина, то имеет смысл только корень

$$x = \frac{m_1g}{k} + \frac{(m_1+m_2)g}{k} = \frac{(2m_1+m_2)g}{k} \tag{5}$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что $f = F - m_1g = kx_2 - m_1g$. Подставляя сюда выражение для x_2 из (5), окончательно получим

$$f = (m_1+m_2)g$$