Кинематика движения по окружности.

1А. Найти линейную скорость Земли V при ее орбитальном движении. Средний радиус земной орбиты $R = 1{,}5 \cdot 10^8$ км.

Решение:

Дано:

$R = 1{,}5 \cdot 10^8$ км

V - ?

Период оборота Земли вокруг Солнца равен $T = 1$ год. За это время Земля проходит расстояние $S = 2\pi R$. Отсюда скорость V равна $V = S/T = 2\pi R/T = 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^8 / 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \approx 30$ км/с.

Ответ: $V = 30$ км/с.

2Б. Пропеллер самолета радиусом 1,5 м вращается при посадке с частотой 2000 об/мин, посадочная скорость самолета относительно Земли равна 162 км/ч. Определить скорость точки на конце пропеллера. Какова траектория движения этой точки?

Решение:

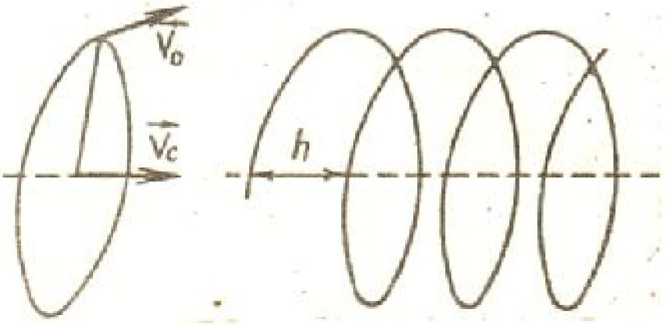
Дано:

$R = 1{,}5$ м

$n = 2000$ об/мин $= 100/3$ об/с

$V = 162$ км/ч $= 45$ м/с

V - ?



Точка на конце пропеллера участвует в двух движениях - в относительном (вращение) и переносном (вместе с самолетом). При этом абсолютная скорость (относительно Земли) $\vec{V}$ этой точки равна:

$$\vec{V} = \vec{V_0} + \vec{V_c}$$

Кроме этого вектор $V_0 \perp V_c$, следовательно $V = \sqrt{V_0^2 + V_c^2}$. Скорость движения точки по окружности V_0 равна $V_0 = 2\pi nR$. В результате $V = \sqrt{4\pi^2 n^2 R^2 + V_c^2}$.
Относительно Земли точка движется по винтообразной линии. Шаг этой линии h равен растоянию, которое пройдет самолет за время одного оборота винта T = 1/n, т.е.

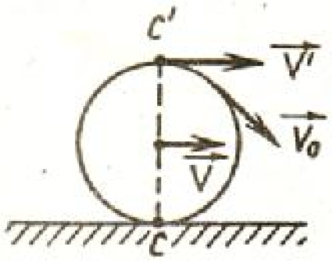
$$h = \frac{V_c}{n}.$$

Для получения численных значений необходимо величину n выразить в единицах об/сек, а V_c - в м/с.

Ответ: V = 316 м/с; h = 1,35 м.

3В. Автомобиль движется со скоростью V = 60 км/ч. С какой частотой n вращаются его колеса, если они катятся по шоссе без скольжения, а внешний диаметр покрышек колес равен d = 60 см? Найти цетростремительное ускорение $a_ц$ внешнего слоя резины на покрышках его колес.

Решение:



Дано:

V = 60 км/ч = 16,7 м/с
d = 60 см = 0,6 м
----
n - ? a = ?

Каждая точка катящегося колеса участвует в двух независимых движениях - она вращается с угловой скоростью ω вокруг оси O - относительное движение, а перемещение этой оси параллельно дороге - переносное. Вращение как вокруг оси O,так и вокруг мгновенного центра вращения C проходит с одинаковой угловой скоростью ω, при этом скорость абсолютного движения V точки C, с одной стороны, равна V = d .

С другой стороны, она равна сумме скорости вращения $\frac{\omega d}{2}$ и скорости переносного движения V, т.е.

$$V' = V + \omega \cdot \frac{d}{2}.$$

Приравнивая оба выражения для V', получаем

$$\omega = \frac{2V}{d}.$$

Т.к. частота вращения $n = \omega / 2\pi$, то

$$n = \frac{V}{\pi d}.$$

В свою очередь

$$a_ц = \frac{\omega^2 d}{2} = \frac{4V^2 d}{2d^2} = \frac{2V^2}{d}.$$

Ответ: $n = 8{,}84$ об/с; $a_ц = 926$ м/с^2

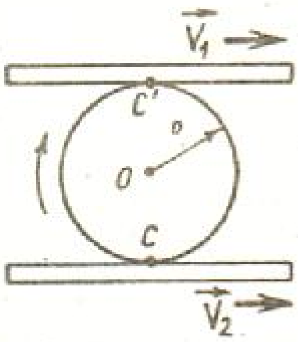
4В. Цилиндрический каток радиусом R помещен между двумя параллельными рейками. Рейки движутся в одну сторону со скоростями V_1 и V_2 (см. рисунок). Определить угловую скорость вращения катка и скорость его центра, если проскальзывание отсутствует. Решить задачу для случая, когда скорости направлены в разные стороны.

Решение:

Дано:

V_1, V_2, R

ω - ? V_0 = ?



Пусть каток движется со скорстью V и вращается с угловой скоростью ω. Скорость точки C', равная V, с одной стороны равна

$$V' = V_0 + \omega R,$$

а с другой стороны, т.к. проскальзывание отсутствует

$$V' = V_1$$

Для точки C имеем, что ее скорость $V'' = V_0 - \omega R$ и $V'' = V_2$. Знаки ω в выражениях выбраны в предположении, что $V_1 > V_2$. Для V и ω имеем систему уравнеий:

$$\begin{cases} V_1 = V_0 + \omega R \\ V_2 = V_0 - \omega R \end{cases}$$

Из нее легко найти:

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2}{2}; \quad \omega = \frac{V_1 - V_2}{2R}.$$

Если скорость нижней доски направлена в другую сторну, то для нее имеем

$V_2 = \omega R - V_0$, т.к. она движется противоположно колесу.

Для верхней доски по-прежнему $V_1 = V_0 + \omega R$.
В этом случае

$$V_0 = \frac{V_1 - V_2}{2}; \quad \omega = \frac{V_1 + V_2}{2R}.$$

Ответ: 1) $V_0 = \dfrac{V_1 + V_2}{2}$, $\omega = \dfrac{V_1 - V_2}{2R}$.

2) $V_0 = \dfrac{V_1 - V_2}{2}$, $\omega = \dfrac{V_1 + V_2}{2R}$.

2. Движение по окружности в горизонтальной плоскости.

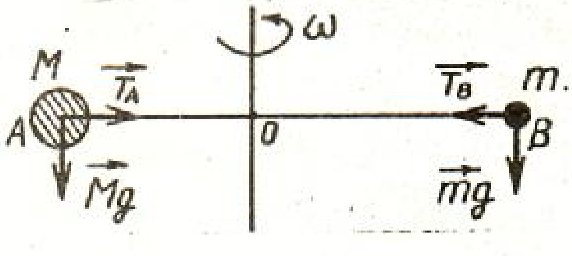
5А. Два шарика с массами М = 9г и m = 3г прикреплены нитями АО и ОВ, общая длина которых ℓ = 1 м, к вертикальной оси О и приводятся во вращательное движение в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω (см. рисунок). Определить, при каком соотношении длин нитей натяжение их будет одинаковым. Весом нитей пренебречь.

Решние:

Дано:

ℓ = 1 м
М = 9 г
m = 3 г

АО = ? ОВ = ?



Пренебрежем размерами шариков, считая их малыми по сравнению с АО и ОВ. На шарики действуют силы тяжести $\vec{Mg}$ и $\vec{mg}$ и силы натяжения $\vec{T_A}$ и $\vec{T_B}$. Силы натяжения $\vec{T_A}$ и $\vec{T_B}$ придают массам центростремительное ускорение $\vec{a}_ц^{(A)}$ и $\vec{a}_ц^{(B)}$. При этом

$$\vec{a}_ц^{(A)} = \frac{\vec{T}_A}{M}; \quad \vec{a}_ц^{(B)} = \frac{\vec{T}_B}{m}.$$

Кроме того

$$a_ц^{(A)} = \omega^2 \cdot AO\ , \quad a_ц^{(B)} = \omega^2 \cdot BO\ .$$

Подставляя эти значения ускорений в первые уравнения, получаем

$$T_A = M\omega^2\ AO, \quad T_B = m\ \omega^2\ BO.$$

Из условия задачи имеем, что $T_A = T_B$; $AO + BO = \ell$.

Тогда

$$\begin{cases} M\,\omega^2 AO - m\,\omega^2 BO = 0 \\ AO + BO = \ell \end{cases} \rightarrow\ AO = \ell\frac{m}{M + m}\ ;\ BO = \ell\frac{M}{M + m}\ .$$

Ответ: AO = 0,25 м; BO = 0,75 м.

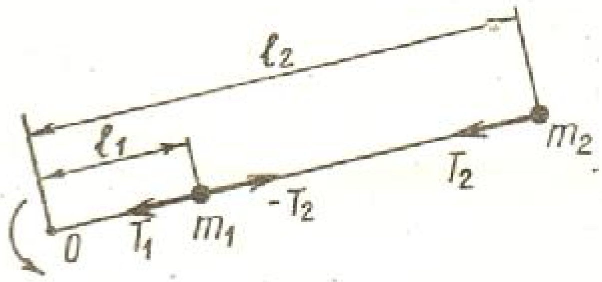
6Б. Две точечные массы m_1 и m_2 прикреплены к нити и находятся на абсолютном гладком столе. Расстояние от них до закрепленного конца нити ℓ_1 и ℓ_2 соответственно (см. рисунок). Система вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через закрепленный конец, с угловой скоростью ω . Найти силы натяжения участков нити T_1 и T_2

Решение:

Дано:

ω , m_1 , m_2 , ℓ_1, ℓ_2

T_1 - ? T_2 - ?



Натяжение на участке Om_1 равно T_1, на участке m_1m_2 - T_2. Центростремительное ускорение массе m_2 обеспечивает сила натяжения T_2 :

$$T_2 = m_2\,\omega^2\,\ell_2^2$$

Массе m_1 центростремительное ускорение обеспечивает разность сил $T_1 - T_2$, при этом

$$T_1 - T_2 = m_1\,\omega^2\,\ell_1$$

Решение последнего уравнения относительно T_1 дает:

$$T_1 = m_1\,\omega^2\,\ell_1 + m_2\,\omega^2\ell_2$$

Ответ: $T_1 = \omega^2(m_1\ell_1 + m_2\ell_2)$; $T_2 = m_2\,\omega^2\ell_2$.

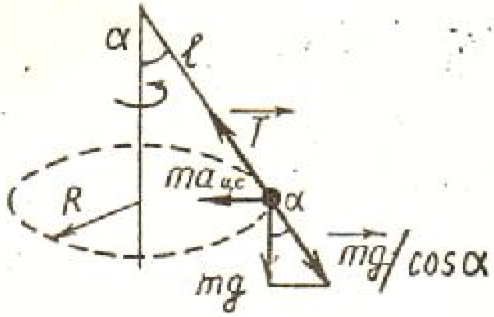
7Б. Тяжелый шарик подвешен на нити длиной ℓ . Шарик равномерно вращается по кругу в горизонтальной плоскости (см. рисунок). Нить при этом отклонена угол α от вертикали. Найти время полного оборота шарика.

Решение:

Дано:

ℓ, α

T - ?



Сила тяжести шарика $\vec{mg}$ обеспечивает натяжение нити $\vec{T}$ и центростемительное ускорение $\vec{a}_ц$, удерживающее шарик на окружности. Из условия равновесия шарика вдоль направления нити получаем, что

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

Проекции сил на направление вращения равна $T\cdot\sin\alpha$, т.е.

$$a_ц = \frac{T\sin\alpha}{m} = g\,tg\,\alpha$$

С другой стороны центростремительное ускорение $a_ц$ равно:

$$a_ц = \omega^2 R = \omega^2 \ell \sin\alpha$$

Угловая скорость вращения ω и время полного оборота связаны соотношением $T = 2\pi/\omega$, поэтому

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\alpha}{g}}$.

3. Движение по окружности в горизонтальной плоскости

при наличии сил трения.

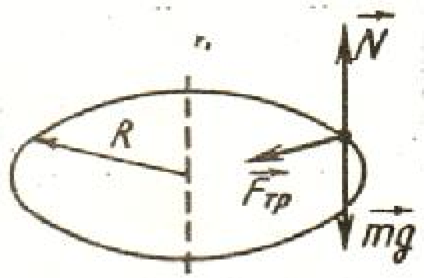
8А. Человек сидит на краю круглой горизонтальной платформы радиусом R = 4 м. С какой частотой n должна вращаться платформа вокруг вертикальной оси, чтобы человек не мог удержаться на ней при коэффициенте трения μ = 0,27?

Решение:

Дано:

R = 4 м
μ = 0,27

n - ?



На человека, сидящего на краю платформы, действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ ($F_{тр} = \mu N$). Сила реакции опоры $N = mg$, поэтому $F_{тр} = \mu mg$.
Человек не удерживается на платформе, если сила трения μmg окажется недостаточной, чтобы сообщить ему необходимое центротремительное ускорение, т.е.

$$\frac{F_{тр}}{m} = \mu g \leqslant \omega^2 R$$

Частота n связана с ω как $n = \frac{\omega}{2\pi}$. Поэтому при

$$n \geqslant \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu g}{R}}$$

человек скатится с платформы.

Ответ: $n \geqslant 0{,}1$ об/с.

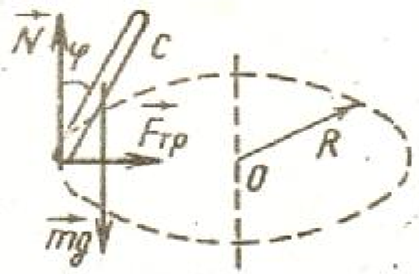
9Б. С какой максимальной скоростью V может ехать по горизонтальной плоскости мотоциклист, описывая дугу радиусом R =90м, если коэффициент трения скольжения μ = 0,4? На какой угол φ от вертикали он должен при этом отклониться?

Решение:

Дано:

$R = 90$ м
$\mu = 0{,}4$

V_{max} - ? φ - ?



На систему "мотоцикл + мотоциклист" действует сила тяжести mg, сила реакции опоры $\vec{N}$ ($N = mg$) и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Максимальная сила трения $F_{тр.max} = \mu N = \mu mg$. Сила трения обеспечивает центростремительное ускорение

$$a_ц = V^2/R = F_{тр}/m \leqslant \mu g.$$

Следовательно, для максимальной скорости

$$V_{max} = \sqrt{\mu g R}$$

Угол наклона определим из равенства нулю суммарного момента сила реакции опоры и силы трения относительно центра тяжести C:

$$-N\sin\varphi + F_{тр}\cos\varphi = 0$$

Или

$$tg\,\varphi = \frac{F_{тр}}{N} = \frac{mV^2}{Rmg} = \frac{V^2}{gR}$$

Для случая, когда $V = V_{max}$

$$\varphi = arctg\,\frac{V^2_{max}}{gR} = arctg\,\mu$$

Ответ: $V_{max} = 18,8$ м/с; $\varphi = 22^\circ$.

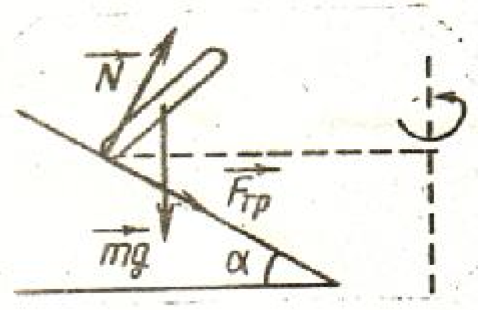
10В. Чему будет равна максимальная скорость мотоциклиста, если он едет по наклонному треку с углом наклона $\alpha = 30$ при радиусе закругления 90 м и коэффициенте трения $\mu = 0,4$? Каким должен быть угол наклона трека α_0 для того, чтобы скорость мотоциклиста могла быть сколь угодно большой?

Решение:

Дано:

$\alpha = 30^\circ$
$R = 90$ м
$\mu = 0,4$

V - ? α_0 - ?



Центростремительное ускорение создает сила, равная сумме проекций всех сил на направление, перпендикулярное оси вращения. В вертикальном направлении мотоциклист не движется, поэтому сумма сил в этом направлении

$$F_{тр}\sin\alpha + mg - N\cos\alpha = 0$$

Максимальная сила трения $F_{тр} = \mu N$, поэтому

$$\frac{mV^2}{R} = N(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$$

Значение силы реакции опоры определим из уравнения

$$\mu N\sin\alpha + mg - N\cos\alpha = 0 \dashrightarrow N = \frac{mg}{-\mu\sin\alpha + \cos\alpha}$$

Итак,

$$V = \sqrt{Rg\,\frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{-\mu\sin\alpha + \cos\alpha}}$$

Скорость V_{max} обратится в ∞ при равенстве нулю знаменателя в последнем выражении, т.е.

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\mu}\right) = \operatorname{arcctg}\mu$$

Ответ: V_{max} = 33,5 м/с, $\alpha_0 = 68^\circ$.

-----

4. Движение по окружности в вертикальной плоскости.

11А. Маятник отклоняют в горизонтальное положение и отпускают. При каком угле с вертикалью сила натяжения нити будет равна по модулю действующей на маятник силе тяжести?

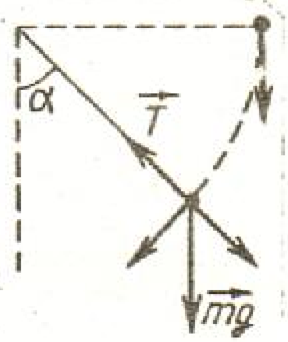
Решение:

Дано:

$\alpha_0 = 90^\circ$

$T = mg$

α - ?



Центростремительное ускорение $a_ц = V^2/R$ обеспечивается разностью силы натяжения T и проекции силы тяжести mg на направление нити, т.е.

$$\frac{T - mg\cos\alpha}{m} = \frac{V^2}{R} \longrightarrow T = m\left(g\cos\alpha + \frac{V^2}{R}\right).$$

С другой стороны, т.к. работа силы натяжения равна 0, уменьшение потенциальной энергии $mgh = mgR\cos\alpha$ равно приращению кинетической энергии $mV^2/2$, т.е.

$$\frac{mV^2}{2} = mgR\cos\alpha, \quad \frac{V^2}{R} = 2g\cos\alpha$$

Сила натяжения T равна:

$$T = 3mg\cos\alpha$$

Приравнивая силу натяжения силе тяжести, имеем

$$mg = 3mg\cos\alpha, \quad \cos\alpha = 1/3$$

Ответ: $\alpha = \arccos\frac{1}{3} \approx 70{,}5^\circ = 70^\circ\,30'$.

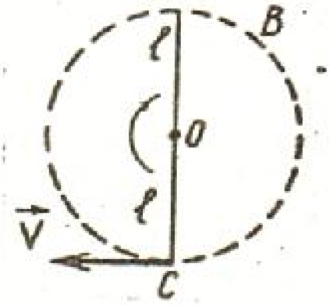
12Б. Один грузик подвешен на нерастяжимой нити длиной ℓ, а другой - на жестком невесомом стержне такой же длины. Какие минимальные скорости нужно сообщить этим грузикам, чтобы они вращались в вертикальной плоскости?

Решение:

Дано:

ℓ

V_1 = ? V_2 = ?



В случае жесткого стержня для вращения необходимо, чтобы груз из нижней точки был доставлен в верхнюю. Минимальная начальная скорость V_1 соответствует случаю, когда в положении B скорость шарика равна 0. Увеличение потенциальной энергии равна $mg \cdot 2\ell$, а уменьшение кинетической - $mV_1^2/2$, таким образом

$$mV_1^2/2 = 2mg\ell, \quad V_1 = 2\sqrt{g\ell}$$

В случае нити для вращения необходимо, чтобы она была натянута вплоть до верхней точки. Минимальная начальная скорость соответствует случаю, когда натяжение в верхней точке равно нулю.

При этом скорость груза V_B в этой точке ненулевая, а центростремительное ускорение V_B^2/ℓ обеспечивается силой тяжести mg так, что

$$\frac{V_B^2}{\ell} = g \text{ или } V_B = \sqrt{g\ell}$$

Из закона сохранения энергии имеем, что уменьшение кинетической энергии $mV_2^2/2 - mV_B^2/2$ равно увеличению потенциальной энергии $2mg\ell$, т.е.

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_B^2}{2} = 2mg\ell; \quad V_2 = \sqrt{4g\ell + V_B^2}$$

Подставляя выражение для V_B получаем, что $V_2 = \sqrt{5g\ell}$

Ответ: $V_2 = 2\sqrt{g\ell}$; $V_2 = \sqrt{5g\ell}$.

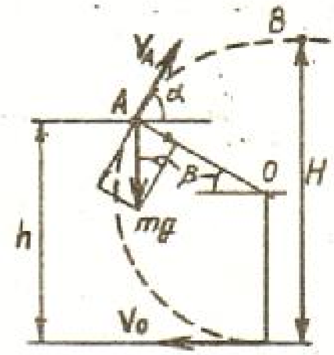
13В. Математическому маятнику с гибкой нерастяжимой нитью длиной ℓ сообщают из положения равновесия горизонтальную скорость V_0. Определить максимальную высоту его подъема h при движении по окружности, если $V_0^2 = 3g\ell$. По какой траектории будет двигаться шарик после того, как он достиг максимальной высоты подъема h на окружности? Определить максимальную высоту H, достигаемую при этом движении маятника.

Решение:

Дано:

$V_0 = \sqrt{3g\ell}$

h - ? H - ?



Начальная скорость груза $V_0 = \sqrt{3g\ell}$ меньше скорости, необходимой для вращения в вертикальной плоскости и равной $\sqrt{5g\ell}$. Вследствие этого груз, двигаясь по окружности, достигнет некоторой точки А, лежащей ниже точки максимального подъема В. В этой точке сила натяжения Т обращается в нуль, а центростремительное ускорение V_A^2/ℓ обеспечивается проекцией силы тяжести на радиальное направление, при этом точка А находится выше центра вращения О. Из условия движения в точке А следует

$$\frac{mV_A^2}{\ell} = mg\sin\beta$$

или

$$V_A^2 = \ell \cdot g\sin\beta \qquad (1)$$

Из закона сохранения энергии имеем в точке А:

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgh + \frac{mV_A^2}{2} \qquad (2)$$

откуда следует:

$$\frac{3g\ell}{2} = g\ell(1 + \sin\beta) + \frac{g\ell\sin\beta}{2},$$

или

$$\sin\beta = \frac{1}{3}, \quad V_A^2 = \frac{g\ell}{3},$$

$$h = \ell(1 + \sin\beta) = \frac{4\ell}{3}.$$

После достижения точки А сила натяжения равна нулю, и груз движется аналогично тому, как движется в поле силы тяжести тело, брошенное со скоростью $V_A = \sqrt{g\ell/3}$ под углом $\alpha = \pi/2 - \beta$ к горизонту. При этом груз поднимется на высоту Н над точкой А (точка В), равную

$$\Delta H = \left(\frac{V_A \cdot \sin\alpha}{2g}\right) = \frac{4\ell}{27} \qquad [\sin^2\alpha = \cos^2\beta = \frac{8}{9}]$$

Высота H при этом равна

$$H = h + \Delta H = \frac{40}{27}\ell$$

Ответ: $h = \frac{4}{3}\ell$; по параболе; $H = \frac{40}{27}\ell$

5. Отрыв от поверхности вращения и движение после обрыва нити.

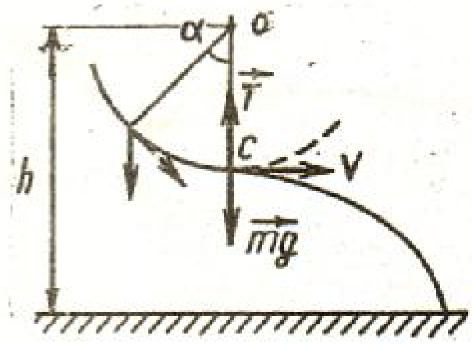
14А. На нити, могущей выдерживать натяжение 39,2 Н, мальчик равномерно вращает камень массой 1 кг в вертикальной плоскости (см. рисунок). Ось вращения отстоит от земли на расстояние h = = 4 м, радиус окружности, описываемой камнем, ℓ = 1 м. С какой минимальной угловой скоростью необходимо мальчику вращать камень, чтобы нить оборвалась?

Решение:

Дано:

h = 4 м, m = 1 кг
ℓ = 1 м
T = 39,2 Н

ω_{min} - ?



Натяжение нити максимально тогда, когда камень проходит нижнюю точку (точку C). Действительно, в этой точке (см. рисунок) центростремительное ускорение равно

$$\frac{V^2}{\ell} = \frac{T - mg}{m} \longrightarrow T = mV^2/\ell + mg.$$

Обрыв возможен при $T = T_0$, т.е.

$$\frac{mV^2}{\ell} = T_0 - mg$$

Минимальная скорость $V = \sqrt{\frac{(T_0 - mg)\ell}{m}}$.

Минимальная угловая скорость

$$\omega_{min} = \frac{V_{min}}{\ell} = \sqrt{\frac{T - mg}{m\ell}}.$$

Ответ: = 5,4 рад/сек.

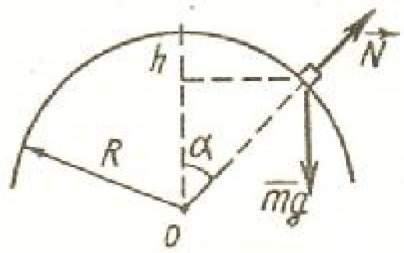
15Б. Небольшое тело скользит с вершины сферы вниз. На какой высоте h от вершины тело оторвется от поверхности сферы радиусом R? Трением пренебречь.

Решение:

Дано:

R

h - ?



До отрыва от поверхности на тело действуют сила тяжести $\vec{mg}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Центростремительное ускорение создается разностью радиальной проекции силы тяжести и силы реакции опоры:

$$\frac{mV^2}{R} = mg\cos\alpha - N$$

По мере соскальзывания скорость V возрастает, а радиальная проекция силы тяжести убывает. Вследствие этого сила реакции должна быстро убывать и наступает момент, когда N = 0 - в этот момент тело отрывается от сферы. Скорость в момент отрыва равна

$$\frac{mV^2}{R} = mg\cos\alpha \quad (1)$$

С другой стороны, из закона сохранения энергии

$$\frac{mV^2}{2} = mgh \quad (2)$$

Также из рисунка легко увидеть, что

$$\cos\alpha = \frac{R - h}{R} \quad (3)$$

Решая систему уравнений относительно h, получаем

$$\frac{2ghm}{R} = mg\frac{R - h}{R}, \text{ откуда } h = R/3.$$

Ответ: h = R/3.

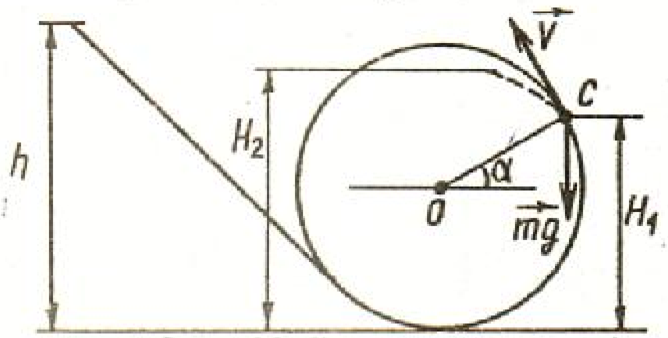
16В. Тяжелый шарик массы m соскальзывает без трения по наклонному желобу, образующему "мертвую петлю" радиуса R (см. рисунок). На какой высоте шарик оторвется от желоба и до какой наибольшей высоты после этого поднимется, если он начиная спускаться по желобу без начальной скорости с высоты h = 2R? Размеры шарика считать ничтожно малыми.

Решение:

Дано:

R, h = 2R

H_1 - ? H_2 - ?



Шарик оторвется от петли в момент, когда сила реакции поверхности равна нулю. В этот момент центростремительное ускорение определяется радиальной проекцией силы тяжести, т.е.

$$\frac{mV^2}{R} = mg\sin\alpha$$

Точка отрыва C находится на высоте H , равной

$$H_1 = R(1 + \sin\alpha)$$

Из закона сохранения энергии получаем, что начальная потенциальная энергия $mgh = 2mgR$ равна сумме кинетической энергии $mV^2/2$ и потенциальной энергии mgH_1 в точке C, т.е.

$$2mgR = \frac{mV^2}{2} + mgR(1 + \sin\alpha)$$

Т.к. $mV^2 = mgR\sin\alpha$, то

$$2mgR = mgR\sin\alpha/2 + mgR + mgR\sin\alpha, \text{ откуда следует } \sin\alpha = \frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$H_1 = \frac{5}{3}R, \qquad V = \sqrt{\frac{2gR}{3}}.$$

Дальнейшее движение происходит по параболе так же, как и для тела, брошенного со скоростью $V = \sqrt{2gR/3}$ под углом $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ к горизонту. Высота ΔH, на которую поднимется тело над уровнем точки C, равна:

$$\Delta H = \frac{(V\sin\beta)^2}{2g} = \frac{2gR}{3g\cdot 2}\cos^2\alpha = \frac{5}{27}R.$$

Максимальная высота H_2, на которую поднимется тело после отрыва, равна

$$H_2 = H_1 + \Delta H = \frac{50}{27} R.$$

<u>Ответ:</u> $H_1 = \frac{5}{3} R$, $H_2 = \frac{50}{27} R$.

6. Определение реакции опоры при движении тела по искривленной поверхности.

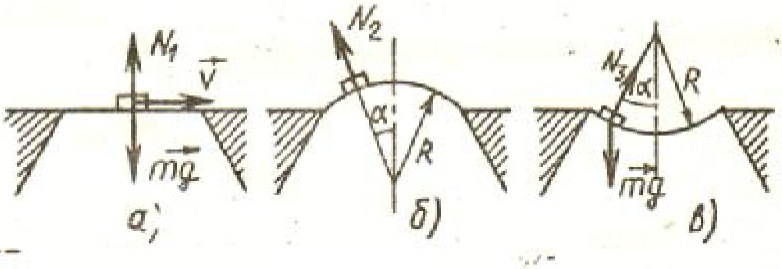
17А. Автомобиль массой $M = 3\ 10^3$ кг движется с постоянной скоростью $V = 36$ км/ч: а) по горизонтальному мосту; б) по выпуклому мосту; в) по вогнутому мосту. Радиус кривизны моста в последних двух случаях $R = 60$ м. С какой силой давит автомобиль на мост (в последних двух случаях) в тот момент, когда линия, соединяющая центр кривизны с автомобилем, составляет угол $\alpha = 10°$ с вертикалью?

<u>Решение:</u>

<u>Дано:</u>

$M = 3 \cdot 10^3$ кг
$V = 36$ км/ч
$\alpha = 10°$

N_1 - ? N_2 - ? N_3 - ?



В первом случае "а)" сила реакции $N_1 = Mg$. В случае "б)" центростремительное ускорение обеспечивается разностью между радиальной проекцией силы тяжести $mg\cos\alpha$ и силой реакции N_2, т.е.

$$\frac{MV^2}{R} = Mg\cos\alpha - N_2, \text{ откуда } N_2 = M\left(g\cos\alpha - \frac{V^2}{R}\right)$$

В случае "в)" аналогично получаем

$$\frac{MV^2}{R} = N_3 - mg\cos\alpha, \text{ откуда } N_3 = M\left(g\cos\alpha + \frac{V^2}{R}\right)$$

<u>Ответ:</u> $N_1 = 29400$ Н, $N_2 = 24000$ Н, $N_3 = 34000$ Н.

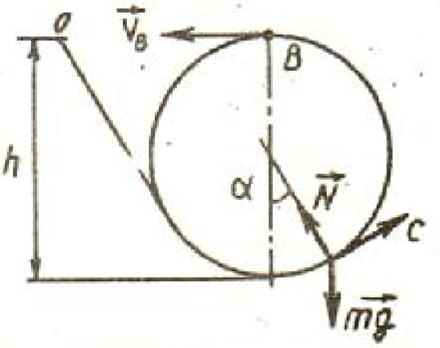
18Б. Небольшое тело массой m соскальзывает вниз по наклонному скату, переходящему в "мертвую петлю" радиусом R. Трение ничтожно мало. Определить: а) какова должна быть наименьшая высота h ската, чтобы тело сделало полную петлю, не выпадая; б) какое давление N при этом производит тело на помост в точке, радиус вектор которой составляет угол α с вертикалью.

Решение:

Дано:

m, R, α

h - ? F - ?



Тело совершает полный оборот в том случае, если всегда будет существовать ненулевая сила давления (а следовательно и сила реакции опоры) на петлю. В верхней точке петли B возможно, что сила реакции опоры $\vec{N}$ равна нулю, из этого условия и найдем минимальную высоту h. В точке B центростремительное ускорение обеспечивается силой тяжести, т.е.

$$\frac{V_B^2}{R} = g \quad (1)$$

V_B - скорость тела в точке B.

С другой стороны, из закона сохранения энергии следует, что

$$mgh = \frac{mV_B^2}{2} + mg2R \quad (2)$$

Из этих двух уравнений находим h:

$$h = \frac{5}{2} R. \quad (3)$$

В точке C центростремительное ускорение равно:

$$\frac{V_C^2}{R} = \frac{N - mg\cos\alpha}{m}, \text{ откуда } N = mg\cos\alpha + \frac{mV_C^2}{R}. \quad (4)$$

Из закона сохранения энергии имеем, что

$$mgh = \frac{mV_C^2}{2} + mgR\,(1 - \cos\alpha) \quad (5)$$

Подставляя в выражение для N величину V_C^2 из уравнения (5) получаем:

$$N = mg\cos\alpha + [5mgR - 2mgR\,(1 - \cos\alpha)]/R$$
$$N = 3mg\,(1 + \cos\alpha)$$

Ответ: $h = \frac{5}{2} R$, $N = 3mg\,(1 + \cos\alpha)$.

7. Равновесие материальной точки на движущейся поверхности.

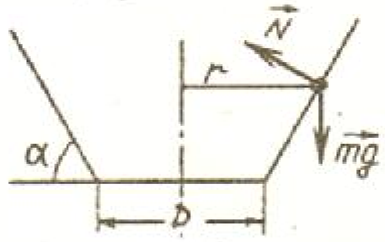
19А. Сосуд, имеющий форму расширяющегося усеченного конуса с диаметром дна D = 20 см и углом наклона стенок $\alpha = 60^o$, вращается вокруг вертикальной оси OO_1. При какой угловой скорости вращения сосуда ω маленький шарик, лежащий на его дне, будет выброшен из сосуда? Трение не учитывать.

Решение:

Дано:

D = 20 см = 0,2 м
$\alpha = 60^o$

ω - ?



На шарик, находящийся на стенке сосуда, действует сила реакции $\vec{N}$ и сила тяжести $\vec{mg}$. Т.к. шарик не "проваливается" сквозь поверхность, то

$$N - mg/\cos\alpha = 0 \qquad \text{или} \qquad N = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

Центростремительное ускорение обеспечивается проекцией силы реакции $\vec{N}$ на перпендикуляр к оси вращения, т.е.

$$\omega_0^2 r = \frac{N\sin\alpha}{m} \qquad \text{или} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g\,tg\,\alpha}{r}},$$

Если значение угловой скорсти превышает данную угловую скорость, т.е. $\omega > \omega_0$, то тело не удержится на данной высоте; сила реакции не обеспечивает нужного центростремительного ускорения, и тело скользит вверх.

Итак, $\omega \geqslant \sqrt{\frac{g\cdot tg\,\alpha}{r}} = \sqrt{\frac{2g\ tg\,\alpha}{D}}$

Ответ: $\omega \geqslant 13$ рад/сек.

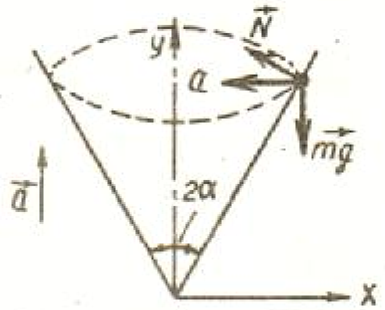
20Б. Внутри конической поверхности, движущейся с ускорением a, вращается шарик по окружности радиусом R. Определить период T движения шарика по окружности. Угол при вершие конуса 2α.

Решение:

Дано:

R, a, 2α

T - ?



На шарик действуют сила реакции движущейся конической поверхности $\vec{N}$ и сила тжести $\vec{mg}$. В вертикальном направлении (по оси OY) 2-й закон Ньютона запишется так:

$$a = \frac{N\sin\alpha - mg}{m}$$

В горизонтальном направлении центростремительное ускорение

$$\omega^2 R = \frac{N\cos\alpha}{m}$$

Подставляя $N = m(g + a)/\sin\alpha$ из первого уравнения во второе, получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{a + g}{R\,tg\,\alpha}}$$

Т.к. $T = \frac{2\pi}{\omega}$, то

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{R\,tg\,\alpha/(a + g)}$

6. Закон всемирного тяготения. Космические скорости.

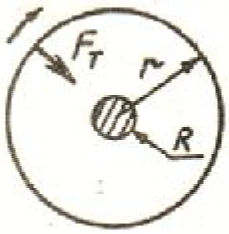
21А. Определить радиус круговой орбиты искусственного спутника Земли, если он, вращаясь в плоскости земного экватора с запада на восток, кажется с Земли неподвижным. Радиус Земли принять равным 6400 км.

Решение:

Дано:

$T = 24$ ч $= 8,64 \cdot 10^4$ сек
$R = 6400$ км $= 6,4\ 10^6$ м

r - ?



В любой точке круговой орбиты на спутник действует сила притяжения F_T, сообщая ему центростремительное ускорение, т.е.

$$\omega^2 r = \gamma\,\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{1}{m} = \frac{\gamma\cdot M}{r^2},$$

где ω - угловая частота вращения, M и m - масса Земли и спутника соответственно, γ - гравитационная постоянная. Легко получить, что

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma M}{\omega^2}}$$

Определим массу Земли. Т.к. на ее поверхности

$$mg = \gamma\cdot mM/R^2,$$

то $\gamma M = gR^2$. Таким образом

$$r = \sqrt[3]{gR^2/\omega^2}.$$

Т.к. $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, то $r = \sqrt[3]{\dfrac{gT^2R^2}{4\pi^2}}$

Ответ: $r = 4{,}23\cdot10^7$ м $= 4{,}23\cdot10^4$ км.

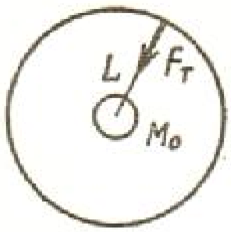
22Б. Найти массу Солнца по постоянной тяготения γ, периоду T обращения Земли вокруг Солнца и расстоянию от Земли до Солнца $R = 1{,}5\cdot10^{11}$ км.

Решение:

Дано:

$\gamma = 6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3/кг·сек
$T = 365\cdot24\cdot3600$ с
$R = 1{,}5\cdot10^{11}$ км

M_0 - ?



В любой точке круговой орбиты на Землю действует сила притяжения Солнца, сообщающая ей центростремительное ускорение, т.е.

$$\omega^2 R = \frac{1}{m}\cdot\gamma\cdot\frac{mM_0}{R^2},$$

где m - масса Земли, $\omega = 2\pi/T$ - угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца. Легко получить, что

$$M_0 = \omega^2\cdot R^3/\gamma$$

Ответ: $M_0 = 2\cdot10^{30}$ кг.

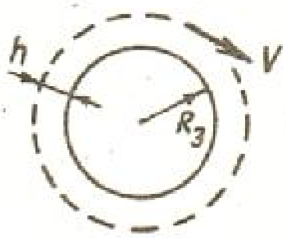
23В. При выводе спутника на круговую орбиту, проходящую вблизи поверхности Земли, была совершена работа $A = 3{,}2\cdot10^{10}$ Дж. Найти массу спутника. Радиус Земли R принять равным 6400 км.

Решение:

Дано:

$A = 3{,}2\cdot10^{10}$ Дж
$R = 6400$ км $= 6{,}4\cdot10^6$ м
$h \ll R$

m - ?



Работа A затрачивается на увеличение потенциальной энергии спутника mgh (h - высота орбиты) и кинетическую энергию $mV^2/2$, т.е. $A = \dfrac{mV^2}{2} + mgh$. Но если орбита спутника находится вблизи поверхности Земли, то $h \approx 0$, следовательно, $A = \frac{mV^2}{2}$, где V - первая космическая скорость.

Но $\frac{mV^2}{R} = mg$, следовательно, $mV^2 = mgR$, откуда $A = \frac{mV^2}{2} = \frac{mgR}{2}$.

Искомая масса спутника

$$m = \frac{2A}{gR} = \frac{2 \cdot 3,2 \cdot 10^{10}}{9,8 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \text{ кг} \approx 10^3 \text{ кг}$$

Ответ: $m \approx 10^3$ кг.
